e-LEE
e-Learning tools for Electrical Engineering

Temática – Máquinas Eléctricas

Capítulo – Conversão Electromagnética

Secção –

MODELIZAÇÃO DE UM ALTIFALANTE

INTRODUÇÃO

Este problema foca a modelização de um altifalante.

pré-requisito:
nível :
duração estimada :
autor: Damien Grenier
realização: Sophie Labrique
versão portuguesa: Maria José Resende

Este projecto é financiado pela União Europeia no âmbito de uma acção Sócrates-Minerva. As informações nele contidas são da exclusiva responsabilidade dos seus autores. A União Europeia declina toda a responsabilidade relativamente ao seu uso.

ENUNCIADO DO PROBLEMA

A figura 1 representa um esquema em corte de um altifalante electrodinâmico. Este dispositivo, que apresenta uma simetria de revolução, é composto por:

- um núcleo em material ferromagnético;
- um íman permanente, magnetizado no sentido axial (isto é, segundo o eixo do x);
- uma bobine móvel composta por espiras, situada no entreferro.

A bobine móvel está solidária com a membrana, pelo que comanda o movimento que cria as ondas de pressão que dão origem ao som.

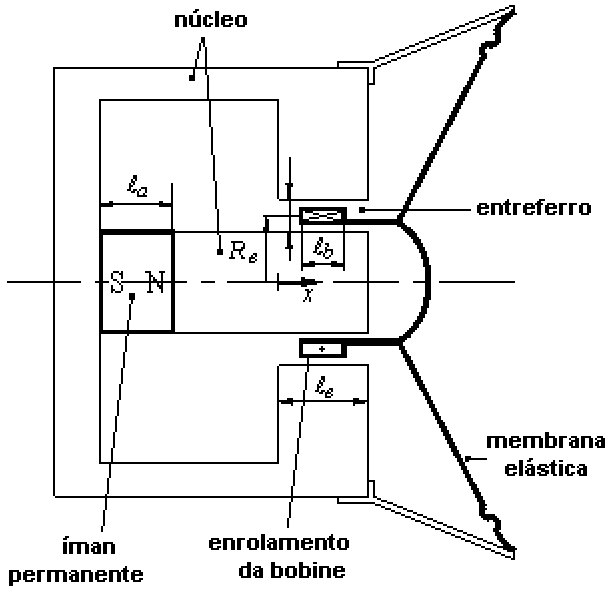

Figura 1

- R_e é o raio médio do entreferro relativamente ao eixo de simetria e, portanto, o raio de uma espira
- e é o comprimento do entreferro
- ℓ_e é a largura axial do entreferro
- ℓ_b é a largura axial da bobine
- ℓ_a é a largura axial do íman.

A característica $B - H$ do íman está representada na figura 2.

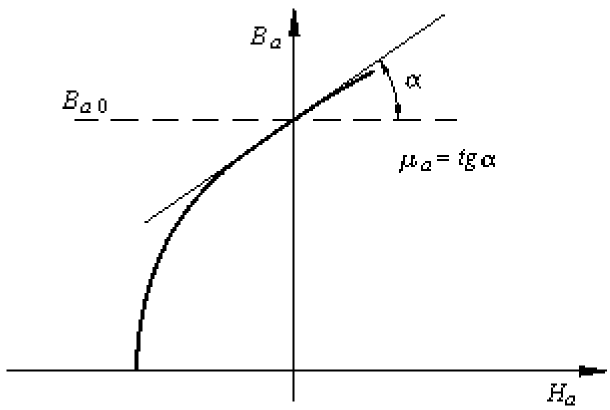

Figura 2

Vai admitir-se que o ponto de funcionamento do íman se situa na zona linear, isto é, na zona onde a característica se pode aproximar à recta de equação $B_a = B_{a0} + \mu_a H_a$.

A força que a bobine móvel, quando é percorrida pela corrente, exerce sobre a membrana é, essencialmente, de origem electrodinâmica e resulta da interacção da corrente com o campo criado pelo íman permanente (e, portanto, também com o fluxo criado por esse campo e que atravessa a bobine). Esta força é também composta por um termo que representa uma força de relutância devida às variações da indutância própria da bobine que resultam da variação da sua posição. Normalmente, este termo é negligenciável face ao termo de origem electrodinâmica.

Pergunta 1.

Calcular a força de origem electrodinâmica que se exerce sobre a bobine, segundo o eixo dos x, quando esta é percorrida por uma corrente i Considere que a bobine se situa sempre no interior do entreferro (admita que a permeabilidade magnética do ferro é infinita, que o entreferro é muito pequeno e que a magnetização do íman é uniforme).

Ajuda:

Se a permeabilidade do ferro é infinita, o campo $\vec{H}$ no ferro é nulo e o campo $\vec{B}$ nas superfícies de separação entre o ferro e o entreferro é perpendicular a estas superfícies e, portanto, puramente radial.

Se o comprimento do entreferro é suficientemente pequeno, pode admitir-se que as linhas de campo são radiais em todo o entreferro e que ao longo de cada linha $\vec{B}$tem um valor constante.

Resposta:

$$F = B_e 2\pi R_e ni = \frac{B_{a0} S_a}{\ell_e}\left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_a + \mu_0 \dfrac{\ell_a}{e}\dfrac{2\pi R_e \ell_e}{S_a}}\right) ni$$

sendo S_a, a secção recta do íman $(S_a = \pi(R_e - e/2)^2)$.

Demonstração:

Podem ser utilizados dois métodos para calcular a força de origem electromagnética que se exerce sobre a bobine no sentido positivo dos eixo dos x. O primeiro é baseado na lei Bli pois os condutores que formam a bobine estão submetidos ao campo $\vec{B}_e$ no entreferro; o segundo, é baseado no cálculo da variação da co-energia magnética em função da posição.

1º método

Para calcular o valor do campo $\vec{B}_e$ no entreferro, utiliza-se o teorema de Ampère aplicado a um contorno que atravessa radialmente o entreferro e axialmente o íman (figura 3). Obtém-se:

$$\oint \vec{H}\,d\vec{\ell} = H_a \ell_a + H_e e = 0 \qquad (1)$$

pois admite-se que :

- a permeabilidade do ferro é infinita e, portanto, o campo H no ferro é nulo
- o campo H_a no íman é uniforme e puramente axial.

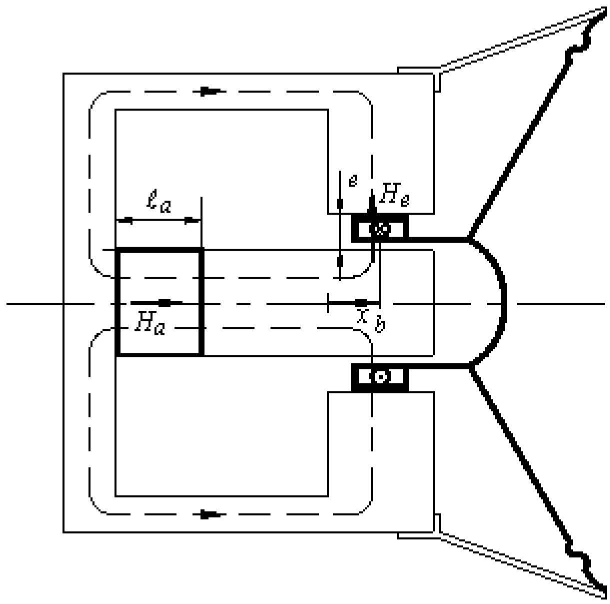

Figura 3

Da expressão (1) deduz-se que o campo $\vec{H}_e$ tem o mesmo valor de H_e em todo o entreferro e que esse valor é:

$$H_e = \frac{-H_a \ell_a}{e}. \qquad (2)$$

Calculado o campo $\vec{H}_e$ no entreferro, pode calcular-se o valor do campo $\vec{B}_e$, se se admitir linearidade magnética, isto é se $\vec{B}_e = \mu_0 \vec{H}_e$.

O fluxo ψ que atravessa o entre ferro é:

$$\psi = \int_S \vec{B}\,d\vec{S} \qquad (3)$$

Como $\vec{B}_e$ é puramente radial e de valor constante em todos os pontos do entreferro, obtém-se:

$$\psi = B_e 2\pi R_e \ell_e \qquad (4)$$

O fluxo ψ fecha-se através do núcleo e do íman. O fluxo que atravessa o íman é calculado através de $B_a S_a$, onde S_a é a secção recta do íman (igual a $\pi(R_e - e/2)^2$); donde:

$$\psi = B_e 2\pi R_e \ell_e = B_a S_a \qquad (5)$$

Expressão da qual se deduz:

$$B_a = \frac{B_e 2\pi R_e \ell_e}{S_a} \qquad (6)$$

Combinando (6) e (2), obtém-se, tendo em conta que $B_e = \mu_0 H_e$:

$$B_a = \frac{-\mu_0 H_a \ell_a}{e}\frac{2\pi R_e \ell_e}{S_a} \qquad (7)$$

A equação (7) estabelece uma relação entre B_ae H_a.

Uma segunda relação entre estas duas grandezas é a característica magnética $B_a(H_a)$do íman, traduzida por:

$$B_a = B_{a0} + \mu_a H_a \qquad (8)$$

O ponto de funcionamento corresponderá à intersecção destas duas características representadas pelas expressões (7) e (8) (ver figura 4).

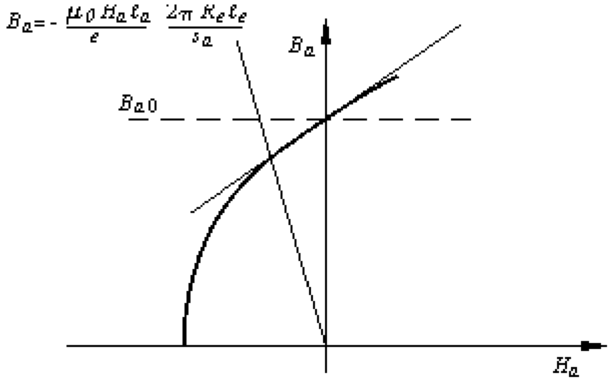

Figura 4

$$B_a = B_{a0}\left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_a + \mu_0 \dfrac{\ell_a}{e}\dfrac{2\pi R_e \ell_e}{S_a}}\right) = \frac{B_{a0}}{1 + \dfrac{\mu_a e S_a}{\mu_0 \ell_a 2\pi R_e \ell_e}} \qquad (9)$$

e, portanto:

$$B_e = \frac{B_a S_a}{2\pi R_e \ell_e} = \frac{B_{a0} S_a}{2\pi R_e \ell_e}\left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_a + \mu_0 \dfrac{\ell_a}{e}\dfrac{2\pi R_e \ell_e}{S_a}}\right) \qquad (10)$$

Se se considerar como positiva a corrente que circula no sentido no sentido indicado na figura 1 (isto é, a entrar no plano da figura na parte do enrolamento situada acima do eixo de simetria, e a sair do plano da figura, na parte situada abaixo), a força $\vec{F}$ de origem electrodinâmica desenvolve-se no sentido positivo do eixo dos xe, por espira, vale:

$$F_{sp} = B_e 2\pi R_e i \qquad (11)$$

onde $2\pi R_e$ representa o comprimento de cada espira.

Como a bobine é composta por n espiras, a força total Fvale:

$$F = B_e 2\pi R_e n i = \frac{B_{a0} S_a}{\ell_e}\left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_a + \mu_0 \dfrac{\ell_a}{e}\dfrac{2\pi R_e \ell_e}{S_a}}\right) n i \qquad (12)$$

2º método

O cálculo do campo B_e no entreferro, efectua-se de forma análoga ao efectuado no 1º método. Em todo o entreferro o campo $\vec{B}_e$ é radial e vale (figura 1):

$$B_e = \frac{B_{a0}S_a}{2\pi R_e \ell_e}\left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_a + \mu_0 \dfrac{\ell_a}{e}\dfrac{2\pi R_e \ell_e}{S_a}}\right) \qquad (13)$$

O fluxo devido ao íman e que atravessa uma secção recta do núcleo situada em x, $(0 < x < \ell_e)$, é igual ao fluxo que atravessa o entreferro de x a ℓ_e (figura 5):

$$\phi(x) = 2\pi R_e(\ell_e - x)B_e \qquad (14)$$

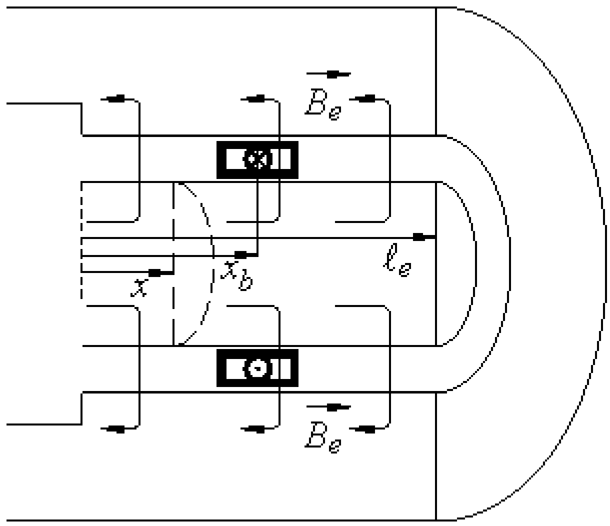

Figura 5

O fluxo circula no sentido positivo do eixo dos x. À parte o sinal, este fluxo é igual ao fluxo devido ao íman e que atravessa uma espira da bobine que esteja localizada na mesma posição. Mas como a bobine é composta por n espiras distribuídas por uma largura axial de ℓ_b, o fluxo ψ_0 que atravessa a bobine será:

$$\psi_0 = \int_{x_b - \ell_b/2}^{x_b + \ell_b/2} -\frac{n}{\ell_b}\,\phi(x)\,dx$$

onde $\dfrac{n}{\ell_b}$ representa uma densidade de espiras por unidade de comprimento axial da bobine.

Substituindo a expressão de $\phi(x)$, fluxo ψ_0 que atravessa a bobine será então dado por

$$\psi_0 = \int_{x_b - \ell_{b/2}}^{x_b + \ell_{b/2}} -(\ell_e - x)\frac{B_{a0}S_a}{\ell e}\left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_a + \mu_0 \dfrac{\ell_a}{e}\dfrac{2\pi R_e \ell_e}{S_a}}\right)\frac{n dx}{\ell_b} \qquad (15)$$

onde x_b representa a posição do ponto médio da bobine (figura 5). A expressão anterior conduz a:

$$\psi_0(x) = -\frac{nB_{a0}S_a}{\ell_e}\left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_a + \mu_0 \dfrac{\ell_a}{e}\dfrac{2\pi R_e \ell_e}{S_a}}\right)(\ell_e - x_b) \qquad (16)$$

O fluxo total induzido na bobine vale:

$$\psi(x) = \psi_0(x) + L_b i \qquad (17)$$

Onde L_b representa a indutância própria da bobine. A co-energia magnética é dada por:

$$W_{cmag} = W_{cmag0} + \int_i^0 \psi(i)di = W_{cmag0} + \psi_0 i + \frac{1}{2}L_b i^2 \qquad (18)$$

O termo W_{mag0} que representa a co-energia magnética quando a corrente é nula é um termo independente da posição da bobine móvel uma vez que o circuito magnético visto pelo íman é invariante relativamente à posição deste.

A força que se exerce sobre a bobine é calculada através da derivada parcial da co-energia em ordem à posição;

$$F = \frac{\partial W_{cmag}}{\partial x} = \frac{\partial \psi_0}{\partial x} i + \frac{1}{2}\frac{\partial L_b}{\partial x} x \qquad (19)$$

O termo $(\partial\psi_0/\partial x)i$ corresponde à força electrodinâmica. O termo $1/2(\partial L_b/\partial x)i^2$ corresponde à força de relutância.

A expressão da força de origem electrodinâmica é, então:

$$F = \frac{\partial \psi_0}{\partial x} i = \frac{nB_{a0}S_a}{\ell_e}(1 - \frac{\mu_a}{\mu_a + \mu_0 \frac{\ell_a}{e}\frac{2\pi R_e \ell_e}{S_a}})i \qquad (20)$$

Constata-se que a expressão (20) é exactamente a mesma deduzida através do 1º método, expressão (12).

Pergunta 2.

A força relutante que se exerce sobre a bobine móvel quando esta é percorrida por uma corrente i é representada por $1/2(\partial L_b/\partial x)i^2$ onde L_b representa a indutância própria da bobine. Estime a expressão desta força, admitindo que o comprimento da bobine é negligenciável (isto é, que todas as espiras se encontram concentradas na posição x_b) e que o íman é um meio de permeabilidade μ_0.

Ajuda:

Para calcular o campo no entreferro devido à corrente *i* na bobine, faça as mesmas hipóteses que para o caso do cálculo do campo no entreferro devido ao íman. Admita ainda que o campo, na zona correspondente ao íman, é axial.

Resposta:

$$F_r = \frac{1}{2}\frac{\partial L_b}{\partial x} i^2 = \mu_o n^2 \frac{\pi R_e}{e} \frac{2\pi R_e \ell_e - S_a \dfrac{e}{\ell_a} - 4\pi R_e x_b}{S_a \dfrac{e}{\ell_a} + 2\pi R_e \ell_e} \cdot i^2$$

Demonstração:

Supor que a bobine está concentrada, equivale a admitir que todos os seus condutores se localizam em $x = x_b$(figura 6). O teorema de Ampère aplicado a todo o contorno que atravesse o entreferro sem incluir a bobine (contorno 1 a vermelho na figura 6, atravessando o entreferro em $x < x_b$) conduz a:

$$\oint H d\ell = H_a \ell_a + H_{e1} e = 0 \qquad (21)$$

O teorema de Ampère aplicado a um contorno que atravesse o entreferro e inclua a bobine (contorno 2 a preto na figura 6, atravessando o entreferro em $x > x_b$) conduz a:

$$\oint H d\ell = H_a \ell_a + H_{e2} e = ni \qquad (22)$$

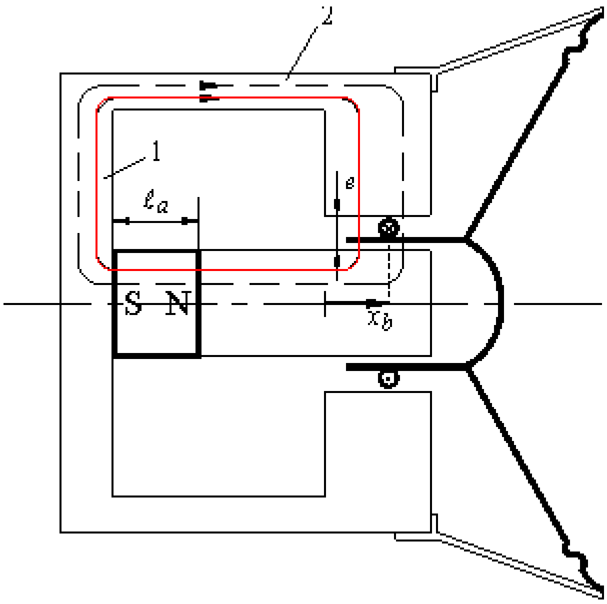

Figura 6

Para obter o valor de H_{e2}, e tal como se efectuou no caso do cálculo do campo devido ao íman, deve-se utilizar a noção de conservação do fluxo isto é, admitir como nula a dispersão:

- o fluxo através do entreferro é:

$$\phi_e = \mu_0 2\pi R_e x_b H_{e1} + \mu_0 2\pi R_e (\ell_e - x_b) H_{e2}$$

- o fluxo através do íman é:

$$\phi_a = \mu_0 H_a S_a.$$

Igualando os dois fluxos:

$$\mu_0 H_a S_a = \mu_0 2\pi R_e (x_b H_{e1} + \ell_e - x_b H_{e2}) \qquad (23)$$

Combinando as equações (21), (22) e (23), obtém-se a expressão do campo H_{e2}:

$$H_{e2} = \left(\frac{S_a \frac{e}{\ell_a} + 2\pi R_e x_b}{S_a \frac{e}{\ell_a} + 2\pi R_e \ell_e} \right) \frac{ni}{e} \qquad (24)$$

O fluxo interceptado pela bobine é igual a $n$vezes o fluxo que atravessa o entreferro de x_ba ℓ_e

$$\psi_b = n \mu_0 H_{e2} 2\pi R_e (\ell_e - x_b) \qquad (25)$$

Obtém-se, atendendo a (24)

$$\psi_b = \mu_0 2\pi R_e \frac{(\ell_e - x_b)}{e} \frac{(S_a \frac{e}{\ell_a} + 2\pi R_e x_b)}{S_a \frac{e}{\ell_a} + 2\pi R_e \ell_e)} n^2 i \qquad (26)$$

A expressão para a indutância $L_b$da bobine será, então:

$$L_b = \frac{\psi_b}{i} = \mu_0 n^2 2\pi R_e (\ell_e - x_b) \frac{(S_a \frac{e}{\ell_a} + 2\pi R_e x_b)}{S_a \frac{e}{\ell_a} + 2\pi R_e \ell_e)} \qquad (27)$$

A força relutante que se exerce sobre a bobine virá:

$$F_r = \frac{1}{2} \frac{\partial L_b}{\partial x} i^2 = \mu_o n^2 \frac{\pi R_e}{e} \frac{2\pi R_e \ell_e - S_a \frac{e}{\ell_a} - 4\pi R_e x_b}{S_a \frac{e}{\ell_a} + 2\pi R_e \ell_e} \cdot i^2 \qquad (28)$$

Num dispositivo correctamente dimensionado, esta força, responsável pelo termo não linear na expressão que relaciona a força total que se exerce na bobine móvel à corrente que nela circula é, geralmente, negligenciável face à força de origem electrodinâmica. É por esta razão que, geralmente, só se toma em linha de conta o termo de origem electrodinâmica.