



e-Learning tools for Electrical Engineering

Temática – Máquinas Eléctricas

Capítulo – Campo Girante

REALIZAÇÃO DE UM ENROLAMENTO SINUSOIDAL

INTRODUÇÃO

Esta secção pretende mostrar como, através de técnicas de bobinagem, é possível realizar um enrolamento que assegura uma distribuição sinusoidal do campo no entreferro. Mostra-se que é mais fácil atingir este objectivo através de um enrolamento trifásico do que um bifásico, o que justifica, entre outras razões, a grande difusão dos sistemas trifásicos em electrotecnia.

- pré-requisitos :
- nível : Bases de Engenharia Electrotécnica ou Área de Especialização
- recursos relacionados :
- duração estimada : 1,5 horas
- autor : [Damien Grenier](#)
- realização : Sophie Labrique
- versão portuguesa : [Maria José Resende](#)



Este projecto é financiado pela União Europeia no âmbito de uma acção Sócrates-Minerva. As informações nele contidas são da exclusiva responsabilidade dos seus autores. A União Europeia declina toda a responsabilidade relativamente ao seu uso.

QUESTÃO 1:

Calcular o campo H no entreferro, criado por uma espira situada na periferia de um entreferro liso, percorrida pela corrente I (ver figura 1). Considera-se que a permeabilidade do ferro é infinita e desprezam-se os fluxos de dispersão (fugas).

Vai escolher-se como eixo de referência para a posição de um ponto do entreferro, o eixo magnético da bobine.

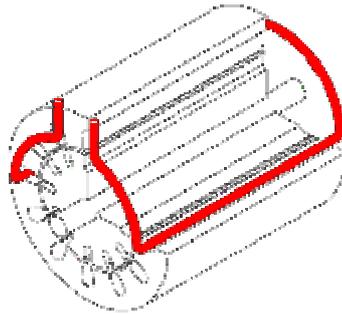


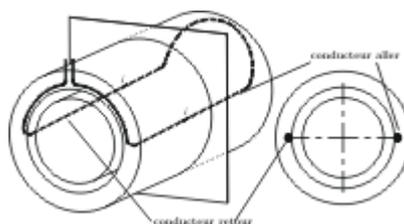
Figura 1

Ajuda>>

As principais hipóteses a considerar são (Figura 1):

- a espessura do entreferro pode ser considerada constante, não tomando, assim, em consideração, as cavas onde se situam os condutores;
- o ferro tem uma permeabilidade infinita, pelo que o campo H no ferro é nulo;
- o entreferro é de reduzida espessura, pelo que as linhas do campo são puramente radiais e, ao longo de uma linha de campo, B e também H , apresentam um valor constante;
- o campo dirige-se do rotor para o estator em metade da periferia da máquina e em sentido contrário na outra metade;
- não existem efeitos terminais, o que equivale a admitir que a repartição do campo no entreferro não depende do plano de corte perpendicular ao eixo da máquina.

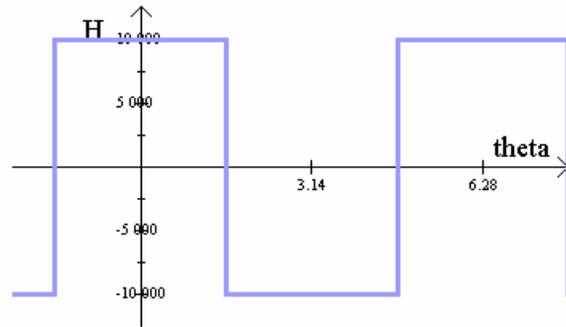
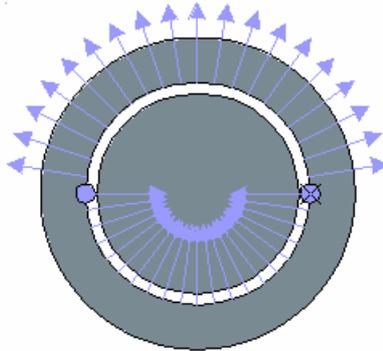
nestas condições, o valor do campo num ponto do entreferro não depende da respectiva coordenada angular θ . Será suficiente estudar a repartição do campo num plano de corte perpendicular ao eixo da máquina.

**Resposta>>**

Como o entreferro é de reduzida espessura, pode admitir-se que o campo é puramente radial. Para uma corrente I positiva, o campo é positivo (dirige-se do rotor para o estator) para $\frac{\pi}{2}$

$\theta < \frac{\pi}{2}$ e é negativo (dirige-se do estator para o rotor) para $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

$$H(\theta) = \begin{cases} \frac{I}{2e} & \text{pour } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{I}{2e} & \text{pour } \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$



I: [A] e: [mm]

Hmax = 10 000 [A / m]

Animação

Demonstração >>

Para calcular o campo H num ponto M do entreferro, na posição angular θ , há que aplicar o [teorema de 'Ampère](#) a um contorno Γ , que atravesse o entreferro em θ e $\pi-\theta$ (ver Figura 1a).

Tem-se :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (1)$$

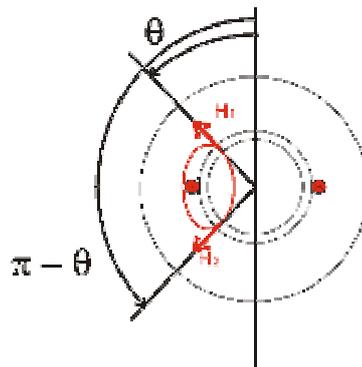


figura 1a

Como se admite que a permeabilidade do ferro é infinita, o campo H é nulo no ferro (pois, $H = B / \mu$); os únicos troços do contorno Γ que nos interessam são os que atravessam o entreferro.

Como o entreferro é de reduzida espessura, pode admitir-se que o campo é puramente radial. Para uma corrente I positiva, o campo é positivo (dirige-se do rotor para o estator) para $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ e é negativo (dirige-se do estator para o rotor) para $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

Nestas condições, a equação (1) conduz a:

$$H(\theta).e - H(\pi - \theta).e = I \quad (2)$$

Como, por razões de simetria, o valor do campo H em θ é igual ao simétrico desse valor, em $\pi - \theta$, obtém-se:

$$H(\theta) = -H(\pi - \theta) \quad (3)$$

Deduz-se, finalmente:

$$H(\theta) = \begin{cases} \frac{I}{2e} & \text{pour } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{I}{2e} & \text{pour } \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

QUESTÃO 2:

Calcular os coeficientes do desenvolvimento em série de Fourier das harmónicas espaciais deste campo e desenhar o respectivo espectro.

Ajuda >>

O desenvolvimento em série de Fourier de uma função $F(x)$ par, periódica de período T , representa-se por:

$$F(x) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) \quad (1)$$

com:

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(x) dx$$

$$F_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx$$

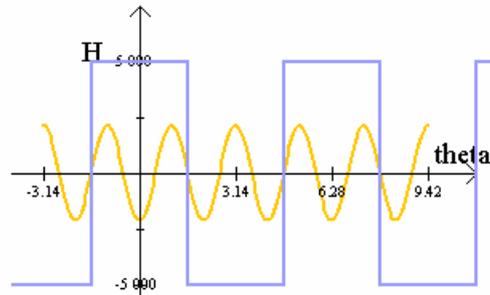
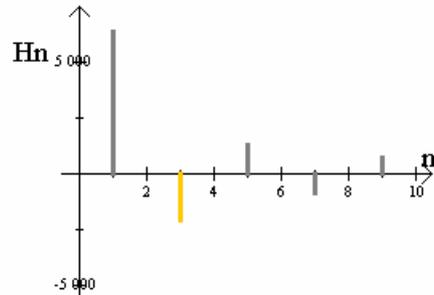
O valor absoluto de F_n representa a amplitude da harmónica de ordem n .

Resposta >>

Os coeficientes de Fourier das harmónicas de ordem par são nulos. Estas harmónicas não existem.

Os coeficientes de Fourier das harmónicas de ordem ímpar são iguais a:

$$H_{2k+1} = \frac{(-1)^k 2I}{(2k+1)\pi e}$$

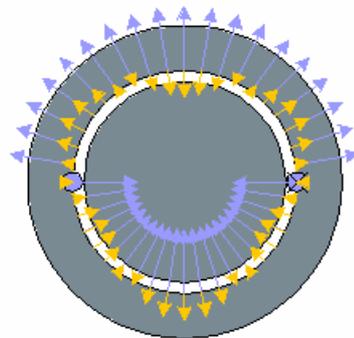
**Données :**

e = 1 [mm] I = 10 [A]
valeur maximale du champ = 5 000 [A/m]

Choisissez le rang de l'harmonique :

Aucun 1 3 5 7 9

La valeur de crête de l'harmonique = -2 122 [A/m]



Animação

QUESTÃO 3:

Repetir o cálculo para um enrolamento constituído por N espiras em série e, portanto, percorridas pela mesma corrente I .

Resposta >>

O procedimento é semelhante ao do caso anterior, tanto para o [cálculo do campo H](#) como para o [cálculo das suas harmónicas espaciais](#), apenas substituindo I por NI . Obtém-se, assim:

$$H(\theta) = \begin{cases} \frac{NI}{2e} & \text{pour } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{NI}{2e} & \text{pour } \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

O espectro de H não contém harmónicas de ordem par. As harmónicas de ordem ímpar apresentam coeficientes de Fourier iguais a:

$$H_{2k+1} = \frac{(-1)^k 2NI}{(2k+1)\pi e}$$

Verificação >>

Pode verificar-se a pertinência das hipóteses consideradas para o cálculo teórico, comparando os resultados assim obtidos (figura 1) com os obtidos através de uma modelização por elementos finitos.

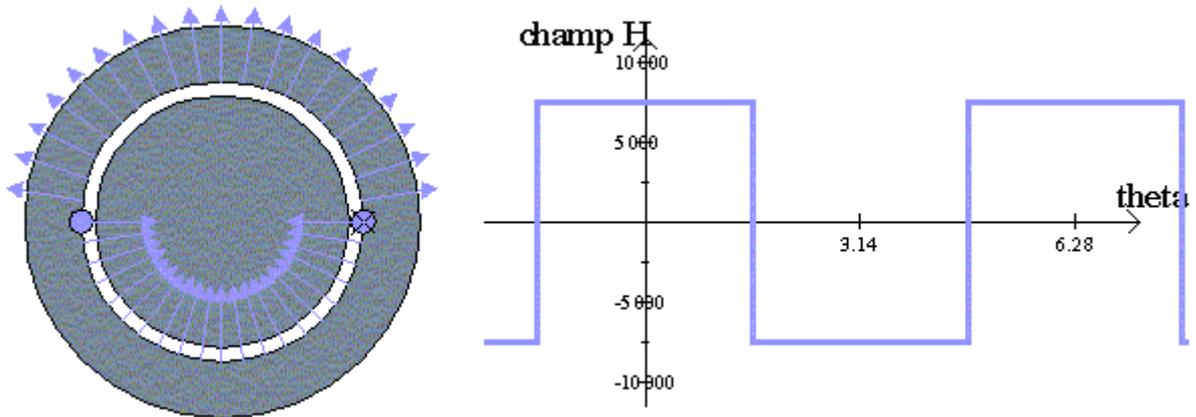


Figura 1 : Resultado do cálculo teórico

A técnica dos elementos finitos permite a resolução numérica das equações locais do campo na máquina. Tem por base a discretização do espaço, permitindo a integração numérica das equações de Maxwell.

Nota : As figuras 2 a 6 foram obtidas através do programa FLUX2D desenvolvido pela empresa [Cedrat](#).

Pode verificar-se a pertinência das hipóteses consideradas para o cálculo teórico, comparando os resultados assim obtidos (figura 1) com os obtidos através de uma modelização por elementos finitos.

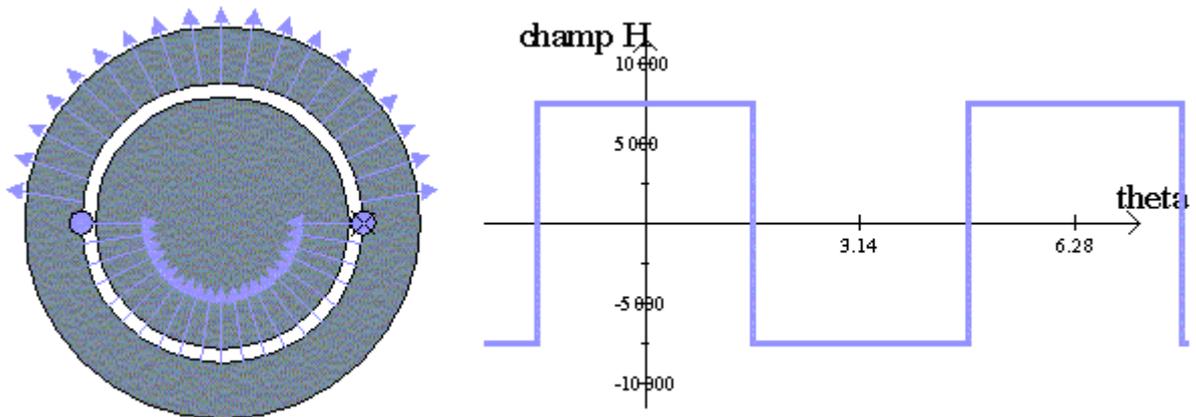


Figura 1 : Resultado do cálculo teórico

A técnica dos elementos finitos permite a resolução numérica das equações locais do campo na máquina. Tem por base a discretização do espaço, permitindo a integração numérica das equações de Maxwell.

Nota : As figuras 2 a 6 foram obtidas através do programa FLUX2D desenvolvido pela empresa *Cedrat*.

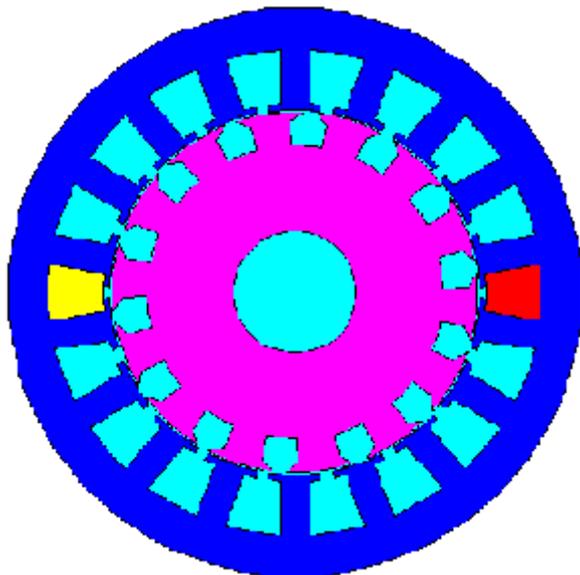


Figura 2 : Corte transversal da máquina em estudo

Considera-se a máquina cujo corte transversal se encontra representado na figura 2. As superfícies a azul escuro e a rosa representam, respectivamente o estator e o rotor, constituídos por um material ferromagnético cuja permeabilidade relativa é elevada sem que o campo atinja o seu valor de saturação. As zonas representadas a azul turquesa possuem características magnéticas semelhantes às do ar. Elas podem corresponder quer, efectivamente, a ar (nomeadamente, no entreferro), quer a condutores de cobre que não são percorridos por corrente (caso das cavas do rotor e da maior parte das cavas do estator, neste exemplo), quer ainda ao eixo mecânico da máquina (que aqui se admite ser constituído por aço sem qualquer característica magnética, isto é, permeabilidade magnética nula). Finalmente, as duas superfícies a vermelho e amarelo correspondem a duas cavas preenchidas por condutores percorridos por uma corrente não nula.

Neste estudo, não se consideram individualmente cada um dos condutores, a sua secção e a sua posição exacta (cuja determinação exacta seria impossível de determinar, dada a aleatoriedade do processo de bobinagem). Estas duas cavas correspondem a zonas preenchidas por um material de características magnéticas semelhantes às do ar e percorrido por uma densidade de corrente j constante e igual a $\frac{kNI}{S}$ onde N representa o número de espiras da bobine, I a corrente que aí circula, S a superfície da cava e k o coeficiente de preenchimento do enrolamento, ou seja, a relação entre a superfície total dos condutores e a superfície da cava ($k = \frac{N\sigma_c}{S}$ se se designar por σ_c a secção de um dos condutores).

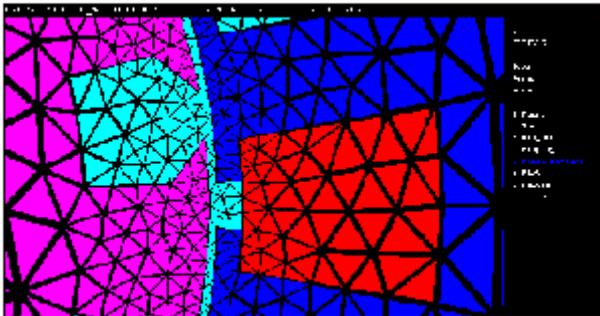


Figura 3 : Malha junto ao entreferro

A superfície em estudo foi dividida em cerca de 6000 elementos cuja forma deverá ser, para se ter uma boa representação total, a mais próxima possível de um triângulo equilátero. A malha é mais densa (detalhada) junto ao entreferro (figura 3) e mais espaçada nas outras zonas (como, por exemplo, junto ao eixo ou nas partes exteriores do estator) para limitar o número de elementos. A estes elementos estão associados cerca de 12000 pontos (os nós) correspondentes que aos vértices destes triângulos que ao ponto médio dos seus lados. É em cada um destes pontos que será calculado o potencial vector \vec{A} (definido por $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$), que, para um problema a duas dimensões como o aqui apresentado, apresenta apenas uma componente não nula; a componente A_z ortogonal ao plano da figura.

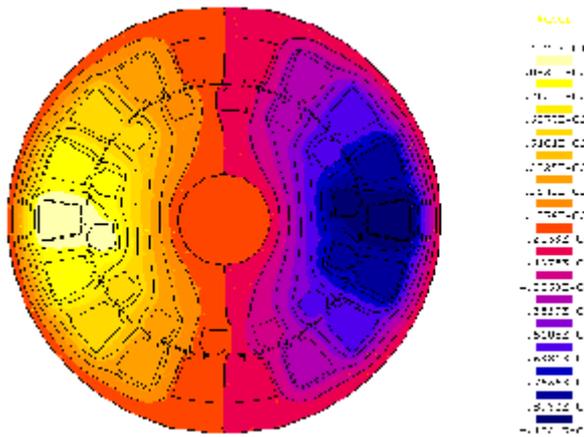


Figura 4 : Valores do potencial vector

A figura 4 representa os valores deste potencial vector em todos os pontos da máquina. Constatase que é negativo junto da cava contendo condutores percorridos por correntes cujo sentido corresponde a "entrar" no plano da figura e positivo junto da outra cava. As linhas equipotenciais correspondem à trajectória do fluxo magnético. Constatase que este fluxo circunda as duas cavas.

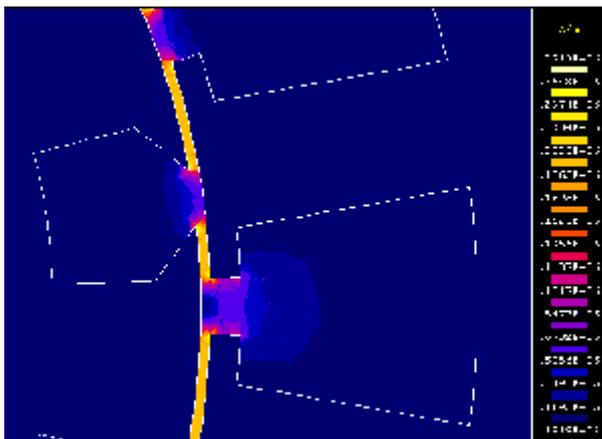


Figura 5 : Amplitude do campo H

Observando os valores do campo H , constatase na figura 5 que a sua amplitude é praticamente nula excepto no entreferro.

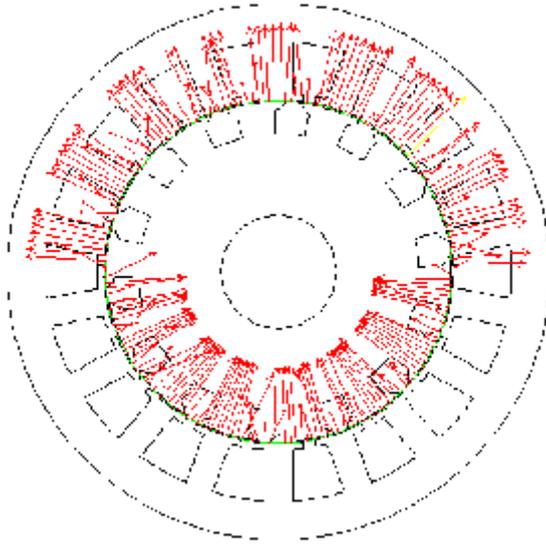


Figura 6 : Representação do vector H no entreferro

Finalmente, na figura 6 representa-se na forma vectorial, o campo H calculado em todos os pontos de uma circunferência localizada no meio do entreferro. Verifica-se que esta representação é relativamente semelhante à obtida pelo [cálculo analítico anterior](#) (figura 1).

As únicas diferenças resultam da presença de cavas tanto no estator como no rotor, responsável por uma deformação local do campo.

QUESTÃO 4:

Considere um enrolamento formado por duas bobinas de $N/2$ espiras cada, cada uma distribuída espacialmente por um ângulo α da periferia (e, portanto, desfasadas espacialmente de um ângulo $\beta = \frac{\alpha}{2}$), ligadas em série e, portanto, percorridas pela mesma corrente I . A figura 2 representa um enrolamento deste tipo para o caso $N=2$.

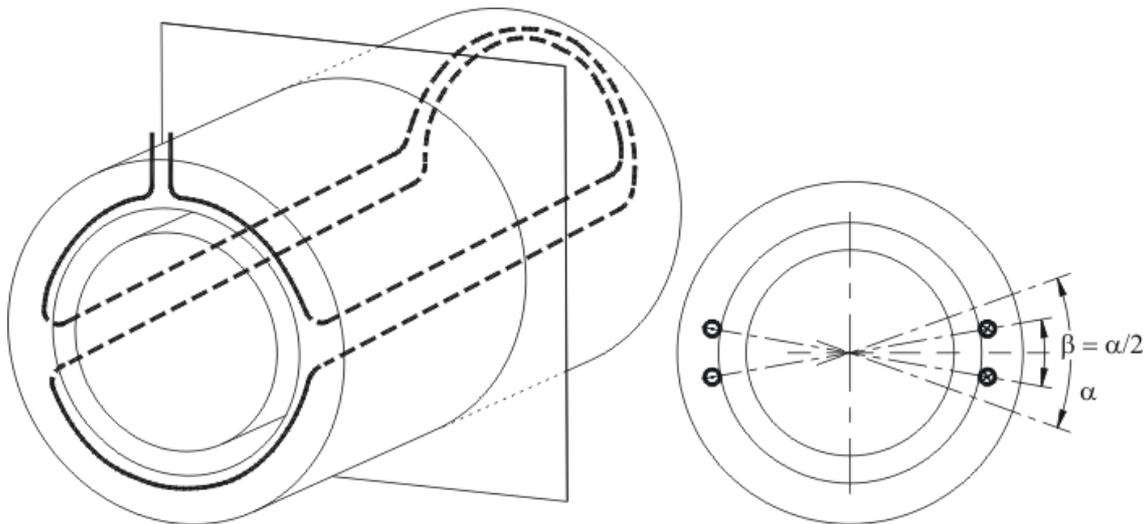
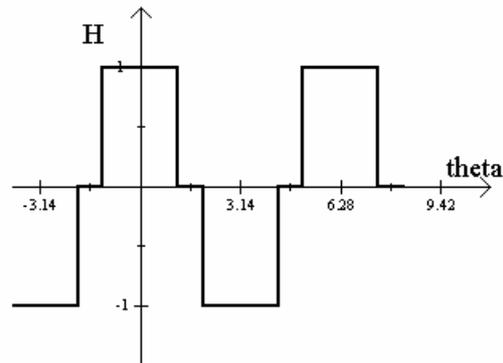
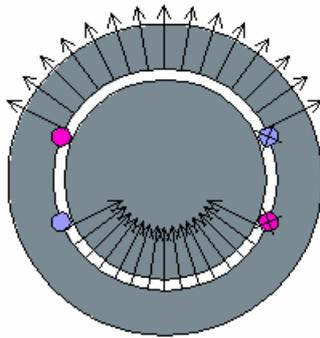


Figura 2

a) Como é o campo H criado por este enrolamento ?

Resposta >>

Questão 4.a :



Choisissez l'angle d'étalement : [°]

Animação

Demonstração >>

Também neste caso, são possíveis duas abordagens:

1. ou o [cálculo directo](#)
2. ou a [soma das componentes harmónicas dos campos criados por cada uma das bobines](#)

1. Cálculo directo

Tal como no caso [precedente](#), calcula-se, tendo em conta a [forma do campo](#):

$$H_n = \frac{1}{\pi} \int_{(-\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4})}^{(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4})} \frac{NI}{2e} \cdot \cos(n\theta) \cdot d\theta - \frac{1}{\pi} \int_{(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4})}^{(\frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{4})} \frac{NI}{2e} \cdot \cos(n\theta) \cdot d\theta$$

Há dois casos a considerar :

- ou n é um número par ($n = 2k$) e então a função $\cos(2k\theta)$ tem uma periodicidade de $\frac{\pi}{k}$. O integral desta função calculado entre $(-\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4})$ e $(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4})$ é igual ao calculado entre $(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4})$ e $(\frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{4})$.

O que permite concluir que as harmónicas de ordem par são nulas.

- ou n é ímpar ($n = 2k + 1$) e então:

$$H_{2k+1} = \frac{(-1)^k 2NI}{(2k+1)\pi e} \cos \left[\frac{(2k+1)\alpha}{4} \right]$$

2. **Soma das componentes harmónicas dos campos criados por cada uma das bobines**

A harmónica de ordem n do campo criado pelas duas bobines é igual à soma das harmónicas de igual ordem dos campos criados por cada uma das bobines; como o campo H é uma função par, obtém-se:

$$H_n \cdot \cos(n\theta) = H_{1n} \cdot \cos n \left(\theta - \frac{\alpha}{4} \right) + H_{2n} \cdot \cos n \left(\theta + \frac{\alpha}{4} \right)$$

onde (para $i = 1$ ou $i = 2$):

$$H_{in} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{(-1)^k N I}{(2k+1)\pi e} & \text{se } n=2k+1 \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Deduz-se imediatamente que as harmónicas H_n de ordem par são nulas.

Como, para $\theta = 0$, se tem:

$$H_n = H_{1n} \cos \left(\frac{-n\alpha}{4} \right) + H_{2n} \cos \left(\frac{n\alpha}{4} \right) \quad (\text{equação 1})$$

Deduz-se que os coeficientes de Fourier das harmónicas de ordem ímpar são:

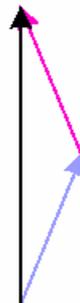
Construção geométrica do coeficiente H_n

A equação (1) dá origem a uma interpretação geométrica imediata que permite a determinação do valor do coeficiente H_n :

Sélectionnez le rang de l'harmonique :

1 3 5 7 9

Choisissez l'angle d'étalement : [°]



Animação

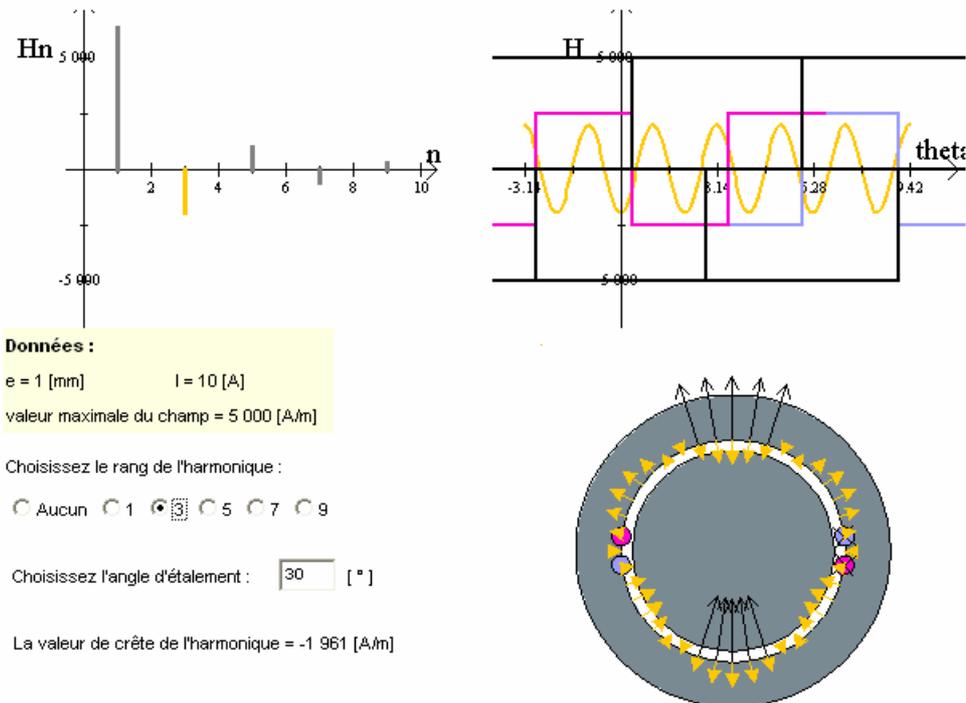
b) Calcular os respectivos coeficientes do desenvolvimento em série de Fourier das harmónicas espaciais.

Resposta >>

Os coeficientes de Fourier das harmónicas de ordem par são nulos.

Os coeficientes de Fourier das harmónicas de ordem par são iguais a :

$$H_{2k+1} = \frac{(-1)^k 2NI}{(2k+1)\pi e} \cos\left[\frac{(2k+1)\alpha}{4}\right]$$



Animação

Demonstração >>

Também neste caso, são possíveis duas abordagens:

1. ou o [cálculo directo](#)
2. ou a [soma das componentes harmónicas dos campos criados por cada uma das bobines](#)

1. Cálculo directo

Tal como no caso [precedente](#), calcula-se, tendo em conta a [forma do campo](#):

$$H_n = \frac{1}{\pi} \int_{(-\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4})}^{(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4})} \frac{NI}{2e} \cdot \cos(n\theta) \cdot d\theta - \frac{1}{\pi} \int_{(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4})}^{(\frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{4})} \frac{NI}{2e} \cdot \cos(n\theta) \cdot d\theta$$

Há dois casos a considerar :

- ou n é um número par ($n = 2k$) e então a função $\cos(2k\theta)$ tem uma periodicidade de $\frac{\pi}{k}$. O integral desta função calculado entre $(-\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4})$ e $(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4})$ é igual ao calculado entre $(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4})$ e $(\frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{4})$.

O que permite concluir que as harmónicas de ordem par são nulas.

- ou n é ímpar ($n = 2k + 1$) e então:

$$H_{2k+1} = \frac{(-1)^k 2NI}{(2k+1)\pi e} \cos \left[\frac{(2k+1)\alpha}{4} \right]$$

2. Soma das componentes harmónicas dos campos criados por cada uma das bobines

A harmónica de ordem n do campo criado pelas duas bobines é igual à soma das harmónicas de igual ordem dos campos criados por cada uma das bobines; como o campo H é uma função par, obtém-se:

$$H_n \cdot \cos(n\theta) = H_{1n} \cdot \cos n \left(\theta - \frac{\alpha}{4} \right) + H_{2n} \cdot \cos n \left(\theta + \frac{\alpha}{4} \right)$$

onde (para $i = 1$ ou $i = 2$) :

$$H_{in} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{(-1)^k NI}{(2k+1)\pi e} & \text{se } n=2k+1 \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Deduz-se imediatamente que as harmónicas H_n de ordem par são nulas.

Como, para $\theta = 0$, se tem:

$$H_n = H_{1n} \cos \left(\frac{-n\alpha}{4} \right) + H_{2n} \cos \left(\frac{n\alpha}{4} \right) \quad (\text{equação 1})$$

Deduz-se que os coeficientes de Fourier das harmónicas de ordem ímpar são:

$$H_{2k+1} = \frac{(-1)^k 2NI}{(2k+1)\pi e} \cos \left[\frac{(2k+1)\alpha}{4} \right]$$

Construção geométrica do coeficiente H_n

A equação (1) dá origem a uma interpretação geométrica imediata que permite a determinação do valor do coeficiente H_n :

Sélectionnez le rang de l'harmonique :

1 3 5 7 9

Choisissez l'angle d'étalement : [°]



Animação

c) Qual é o ângulo α que conduz à anulação da terceira harmónica espacial do campo? Qual o ângulo que conduz à anulação da harmónica de ordem 5?

Resposta>>

- Anulação da harmónica de ordem 3 : H_3 anula-se para:

$$\cos \frac{3\alpha}{4} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3} \text{ soit } \alpha = 120^\circ$$

- Anulação da harmónica de ordem 5 : H_5 anula-se para:

$$\cos \frac{5\alpha}{4} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{5} \text{ soit } \alpha = 72^\circ$$

QUESTÃO 5:

Refazer os cálculos da questão anterior considerando, desta vez um número m de bobines em série, de N/m espiras cada e igualmente distribuídas espacialmente segundo um ângulo α (e, portanto, desfazadas espacialmente de um ângulo $\beta = \alpha/m$) (ver Figura 3).

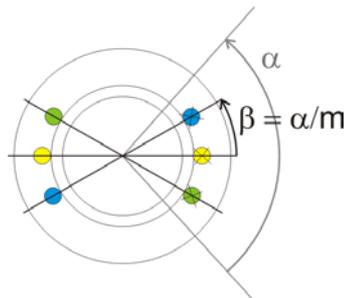
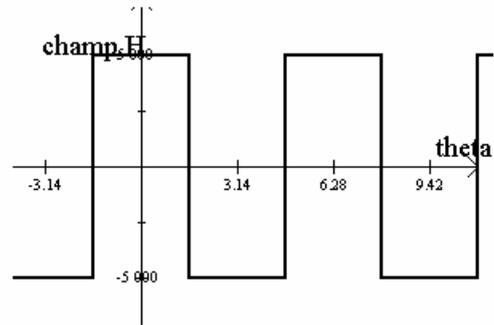
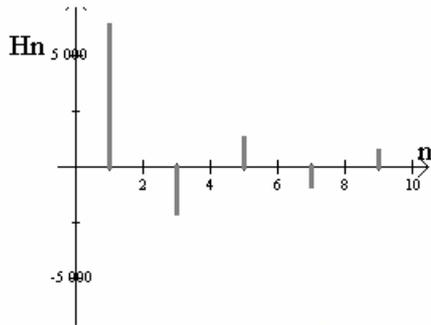


Figura 3

Resposta>>

Efectua-se a soma dos campos H criados por cada uma das m bobines.



Données :

e = 1 [mm] I = 10 [A]
 valeur maximale du champ = 5 000 [A/m]

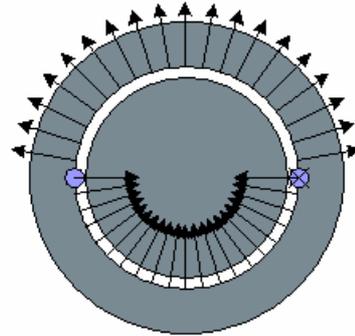
Choisissez le rang de l'harmonique :

- Aucun 1 3 5 7 9

Choisissez l'angle d'étalement : [°]

Choisissez le nombre de bobines :

La valeur de crête de l'harmonique vaut ... [A/m]



O campo H é ainda uma função par.

Animação

Verificação>>

1. Cálculo do campo

Efectua-se a soma dos campos H criados por cada uma das m bobines.

O campo H é ainda uma função par.

2. Cálculo das harmónicas espaciais

Para calcular as harmónicas espaciais, efectua-se a soma das harmónicas de igual ordem, dos campos criados por cada um dos enrolamentos.

De uma forma geral, como o campo H é ainda uma função par, a harmónica espacial de ordem n do campo criado pelo conjunto de m bobines é igual a:

$$H_n \cdot \cos(n\theta) = \sum_{i=1}^m H_{i,n} \cdot \cos n \left[\theta + \left(i - \frac{m+1}{2} \right) \frac{\alpha}{m} \right] \quad (1)$$

com $\forall i$:

$$H_{i,n} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{H_{c,2k+1}}{m} & \text{se } n=2k+1 \text{ é ímpar} \end{cases}$$

onde:

$$H_{c,2k+1} = \frac{(-1)^k 2NI}{(2k+1)\pi e}$$

representa o coeficiente da harmónica de ordem $2k+1$ do campo que criariam N espiras do enrolamento se estivessem concentradas em cavas diametralmente opostas.

Construção geométrica do coeficiente H_n

A construção geométrica que permite a determinação do valor dos coeficientes H_n das harmónicas ímpares, é semelhante à utilizada no caso de apenas **duas bobines**. Baseia-se,

Sélectionnez le rang de l'harmonique :

1 3 5 7 9

Choisissez l'angle d'étalement : [°]



Deduz-se que os coeficientes H_n das harmónicas ímpares são:

$$H_{2k+1} = \frac{H_{c,2k+1}}{m} \cdot \sum_{i=1}^m \cos \left(i - \frac{m+1}{2} \right) \frac{(2k+1)\alpha}{m} \quad (2)$$

- No caso particular de $m = 3$, obtém-se:

$$H_{2k+1} = \frac{H_{c,2k+1}}{3} \left[2 \cos \frac{(2k+1)\alpha}{3} + 1 \right]$$

- H_3 anula-se para: $\cos \frac{3\alpha}{3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$ ou seja $\alpha = 120^\circ$
- H_5 anula-se para: $\cos \frac{5\alpha}{3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{5}$ ou seja $\alpha = 72^\circ$

- No caso particular de $m = 4$, obtém-se:

$$H_{2k+1} = \frac{H_{c,2k+1}}{5} \left(2 \cos \left[\frac{3(2k+1)\alpha}{8} \right] + 2 \cos \left[\frac{(2k+1)\alpha}{8} \right] \right)$$

Verifica-se, mais uma vez, que a terceira harmónica se anula para $\alpha = 120^\circ$ enquanto que a quinta harmónica se anula para $\alpha = 72^\circ$.

Pode generalizar-se este resultado para um número m qualquer de bobinas. A soma (2) pode ser entendida através da sua representação geométrica.

H_{2k+1} está representada na figura 1, pelo vector $\overrightarrow{D_0 D_m}$, como a soma de $\overrightarrow{D_0 D_1}$, $\overrightarrow{D_1 D_2}, \dots, \overrightarrow{D_{m-1} D_m}$,

- todos com a mesma amplitude

$$|H_{i,2k+1}| = \frac{|H_{c,2k+1}|}{m}$$

- desfasados uns dos outros dum ângulo $n\beta = \frac{n\alpha}{m}$.

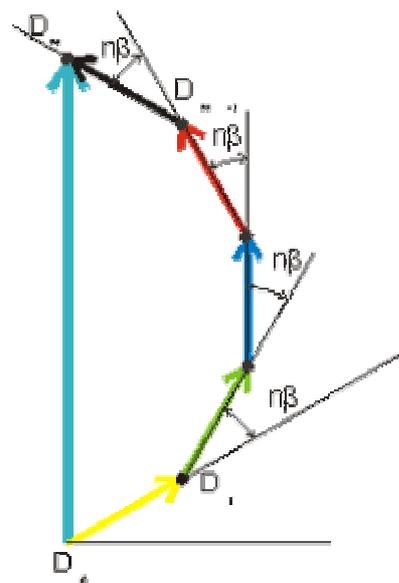


Figura 1

Os pontos de D_0 a D_m estão inscritos numa circunferência de centro O e de raio OD_0 (figura 2). Os pontos $O, D_{i-1}, D_i, i = 1, 2, \dots, m$ formam um triângulo isósceles, com um ângulo γ na base e δ no topo. Mostra-se (ver figura 2) que $2\gamma + n.\beta = \pi$.

Como, adicionalmente, a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a π , deduz-se que $2\gamma + \delta = \pi$ donde, finalmente, $\delta = n.\beta$.

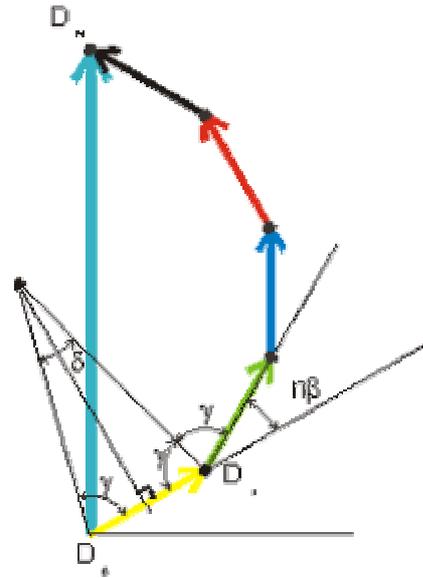


Figura 2

O comprimento do raio OD_0 é dado por (ver figura 3):

$$OD_0 \cdot \sin \frac{n.\beta}{2} = \frac{H_{i,2k+1}}{2}$$

e o da corda D_0D_m , por :

$$D_0D_m = 2 \cdot \left(OD_0 \cdot \sin \frac{n.m.\beta}{2} \right)$$

Deduz-se, finalmente que :

$$H_{2k+1} = H_{c,2k+1} \left(\frac{\sin \frac{n.m.\beta}{2}}{m \sin \frac{n.\beta}{2}} \right)$$

ou ainda , expresso em função do ângulo α :

$$H_{2k+1} = H_{c,2k+1} \left(\frac{\sin \frac{n.\alpha}{2}}{m \sin \frac{n.\alpha}{2m}} \right)$$

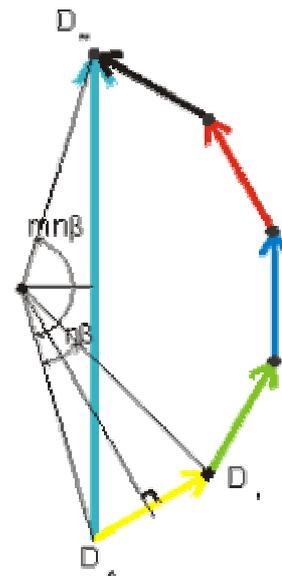


Figura 3

Verifica-se assim que, $\forall m$, a terceira harmónica se anula para $\sin \frac{3\alpha}{2} = 0$ ou seja $\alpha = 120^\circ$, enquanto que a quinta harmónica se anula para $\alpha = 72^\circ$

Demonstração>>

Tendo considerado que as bobinas estavam concentradas em um ou dois pares de cavas, pode verificar-se os resultados obtidos através do método dos elementos finitos.

Nota : As figuras 1, 2, 4 e 5 foram obtidas através do programa FLUX2D desenvolvido pela empresa Cedrat.

1. Caso m=3

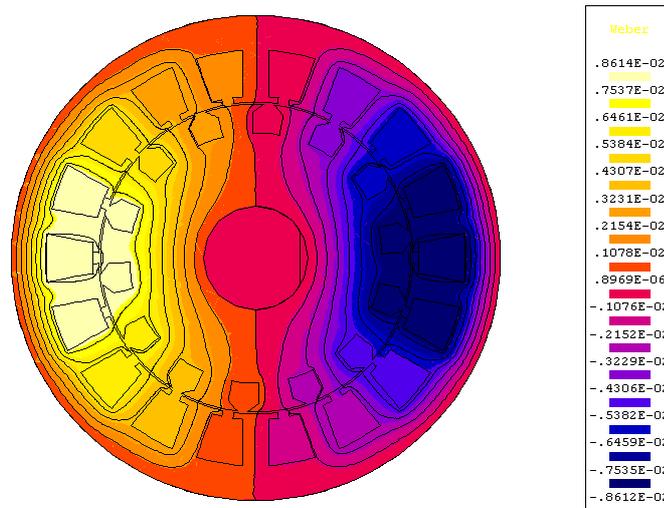


Figura 1 : Valores do potencial vector

A figura 1 representa os valores do potencial vector \vec{A} (definido por $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$) em todos os pontos da máquina. Consta-se que as linhas equipotenciais que correspondem às trajectórias do fluxo magnético, circundam os dois grupos de 3 cavas que contêm os condutores.

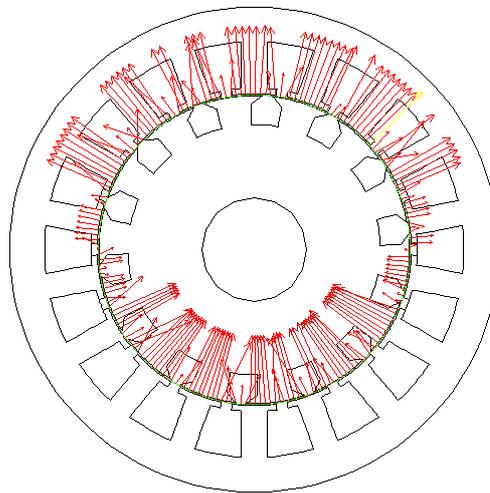


Figura 2 : Representação vectorial do campo H

Os vectores representativos do campo H no entreferro (figura 2), têm, na vizinhança das cavas, um andamento semelhante ao estimado pelo cálculo teórico (figura 3). Consta-se um valor de campo constante (ou positivo ou negativo) nos pontos do entreferro situados entre cavas com condutores percorridos por correntes de sinal oposto. Entre cavas percorridas por correntes de igual sinal, este

valor reduz-se para um terço.

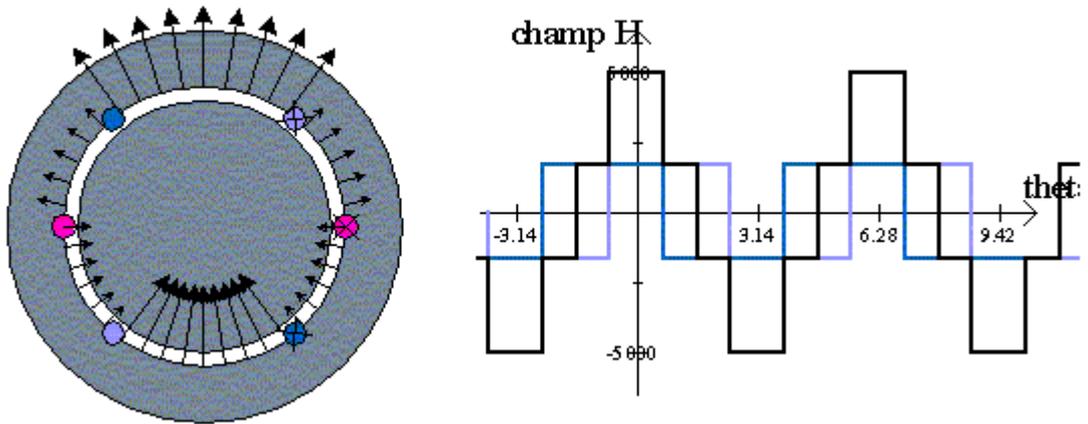


Figura 3 : Resultados do cálculo teórico

2. Caso m=4

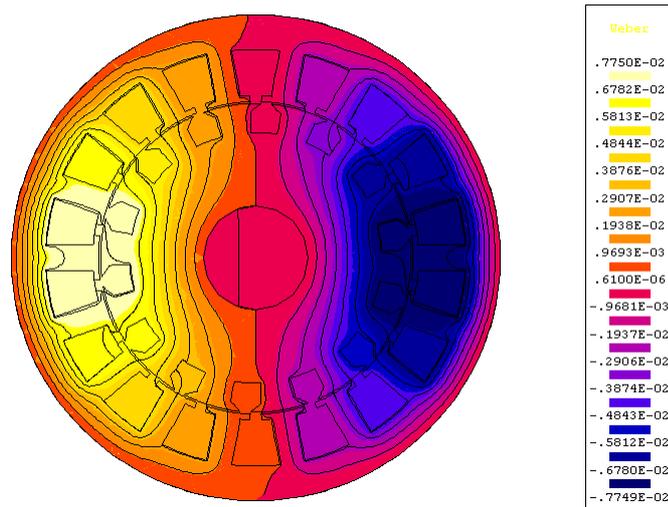


Figura 4 : Valores do potencial vector

A figura 1 representa os valores do potencial vector \vec{A} (definido por $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$) em todos os pontos da máquina. Constata-se que as linhas equipotenciais que correspondem às trajectórias do fluxo magnético, circundam os dois grupos de 4 cavas que contêm os condutores.

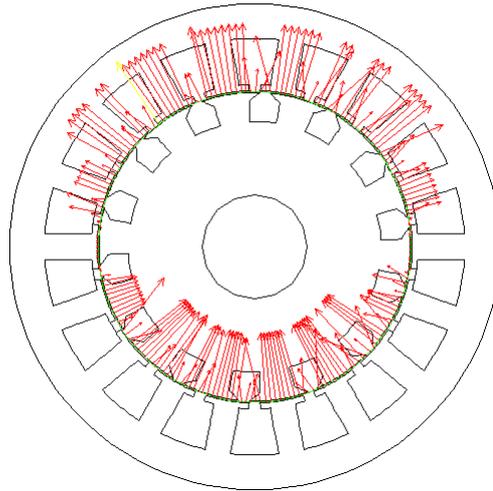


Figura 5 : Representação vectorial do campo H

Os vectores representativos do campo H no entreferro (figura 5), têm, na vizinhança das cavas, um andamento semelhante ao estimado pelo cálculo teórico (figura 6). Consta-se um valor de campo constante (ou positivo ou negativo) nos pontos do entreferro situados entre cavas com condutores percorridos por correntes de sinal oposto. Entre cavas percorridas por correntes de igual sinal, constata-se, sucessivamente, este valor reduzido para metade, depois para um valor nulo e finalmente para metade mas com sinal oposto.

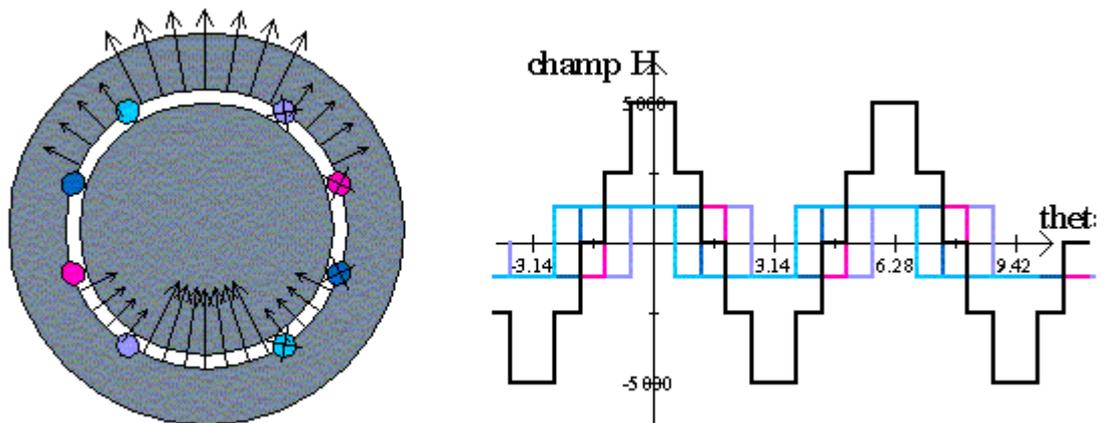


Figura 6: Resultados do cálculo teórico

Nota : As figuras 1, 2, 4 e 5 foram obtidas através do programa FLUX2D desenvolvido pela empresa Cedrat.

1. Caso $m=3$

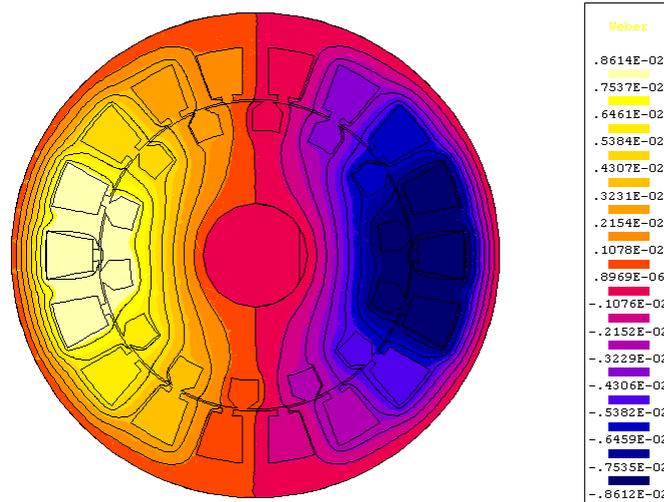


Figura 1 : Valores do potencial vector

A figura 1 representa os valores do potencial vector \vec{A} (definido por $\vec{B} = \nabla \vec{A}$) em todos os pontos da máquina. Consta-se que as linhas equipotenciais que correspondem às trajetórias do fluxo magnético, circundam os dois grupos de 3 cavas que contêm os condutores.

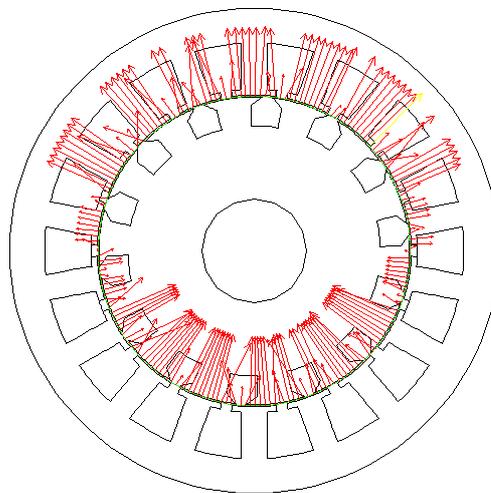


Figura 2 : Representação vectorial do campo H

Os vectores representativos do campo H no entreferro (figura 2), têm, na vizinhança das cavas, um andamento semelhante ao estimado pelo cálculo teórico (figura 3). Consta-se um valor de campo constante (ou positivo ou negativo) nos pontos do entreferro situados entre cavas com condutores percorridos por correntes de sinal oposto. Entre cavas percorridas por correntes de igual sinal, este valor reduz-se para um terço.

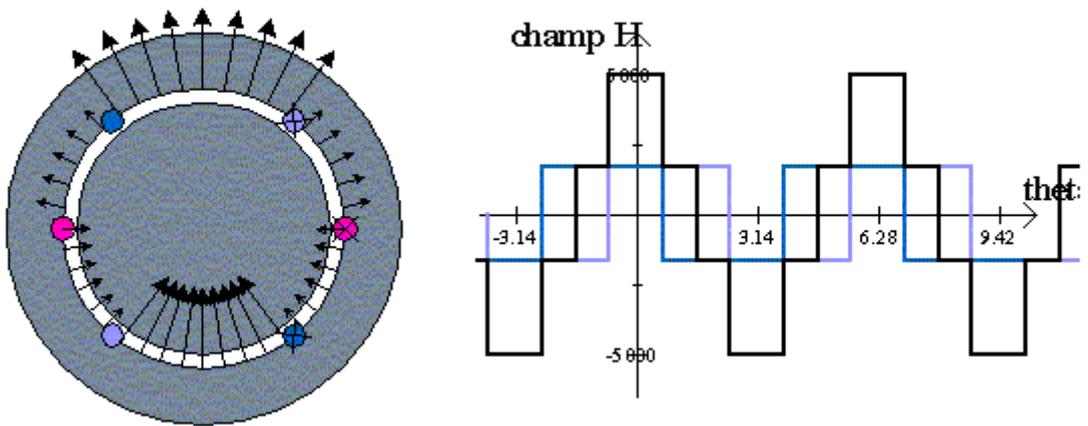


Figura 3 : Resultados do cálculo teórico

2. Caso m=4

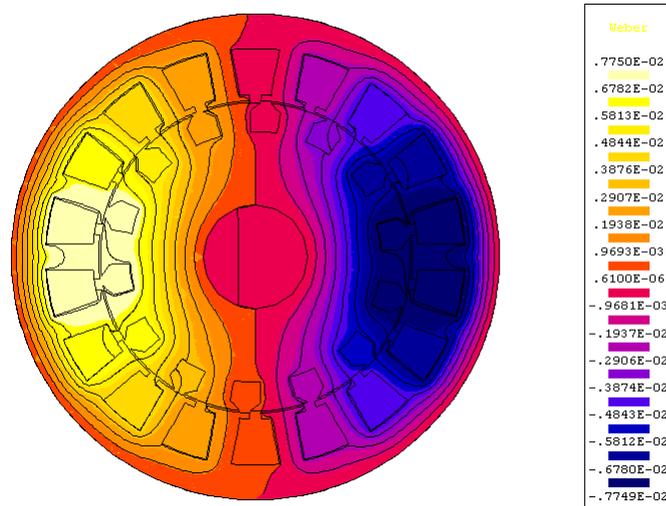


Figura 4 : Valores do potencial vector

A figura 1 representa os valores do potencial vector \vec{A} (definido por $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$) em todos os pontos da máquina. Consta-se que as linhas equipotenciais que correspondem às trajetórias do fluxo magnético, circundam os dois grupos de 4 cavas que contêm os condutores.

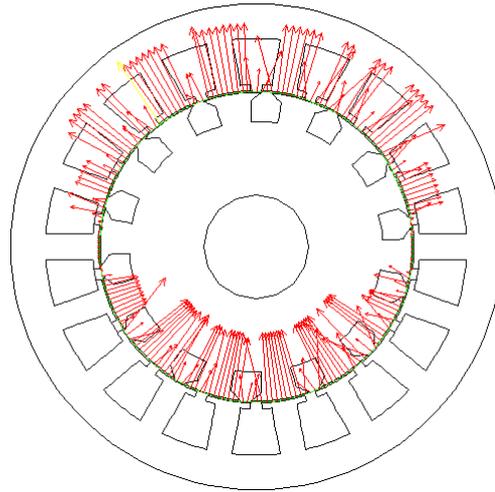


Figura 5 : Representação vectorial do campo H

Os vectores representativos do campo H no entreferro (figura 5), têm, na vizinhança das cavas, um andamento semelhante ao estimado pelo cálculo teórico (figura 6). Constata-se um valor de campo constante (ou positivo ou negativo) nos pontos do entreferro situados entre cavas com condutores percorridos por correntes de sinal oposto. Entre cavas percorridas por correntes de igual sinal, constata-se, sucessivamente, este valor reduzido para metade, depois para um valor nulo e finalmente para metade mas com sinal oposto.

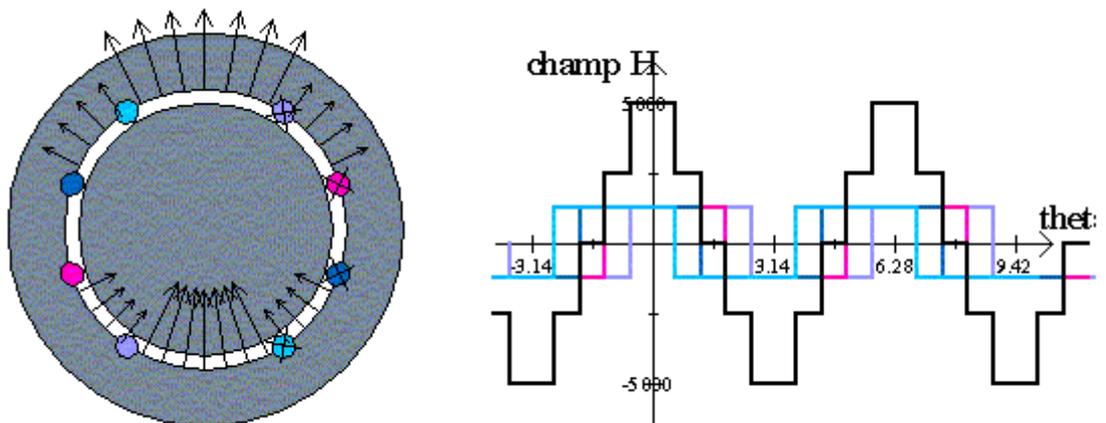


Figura 6: Resultados do cálculo teórico

QUESTÃO 6:

Tendo em conta os resultados anteriores, comparar para uma máquina bifásica e uma trifásica, os valores dos coeficientes de Fourier das diferentes harmónicas espaciais do campo.

Resposta>>

Para uma máquina bifásica com dois enrolamentos a-a' e b-b', o ângulo α máximo que se pode considerar é de 90° ¹

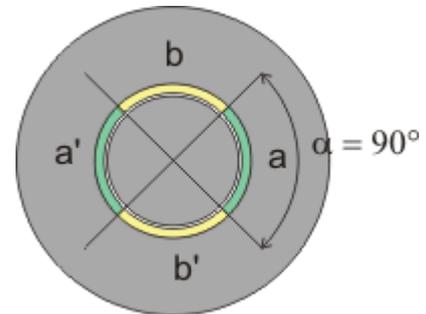


Figura 1

Para este ângulo, a amplitude da terceira harmónica pode ser reduzida para 13,9% da amplitude da componente fundamental, repartindo o enrolamento por duas cavas² e tende para 11,1% quando m tende para infinito.

A amplitude da quinta harmónica vale 8,3% da fundamenta (para $m = 2$) e 4,0% (para $m \rightarrow \infty$) ³.

O preço a pagar para esta redução da taxa harmónica é uma redução de 7,6% (para $m = 2$) a 10,0% (para $m \rightarrow \infty$) da componente fundamental do campo.

Tabela das amplitudes relativas das diferentes harmónicas para $\alpha=90^\circ$

		Ordem da harmónica						
		1	3	5	7	9	11	13
Número de cavas	1	100,0%	33,3%	20,0%	14,3%	11,1%	9,1%	7,7%
	2	92,4%	12,8%	7,7%	13,2%	10,3%	3,5%	2,9%
	3	91,1%	11,1%	4,9%	3,5%	3,7%	8,3%	7,0%
	4	90,6%	10,6%	4,3%	2,6%	2,0%	1,9%	2,4%
	5	90,4%	10,4%	4,0%	2,3%	1,6%	1,3%	1,2%
	6	90,3%	10,3%	3,9%	2,1%	1,4%	1,1%	0,9%
	7	90,2%	10,2%	3,8%	2,0%	1,3%	1,0%	0,8%
	(∞)	90,0%	10,0%	3,6%	1,8%	1,1%	0,7%	0,5%

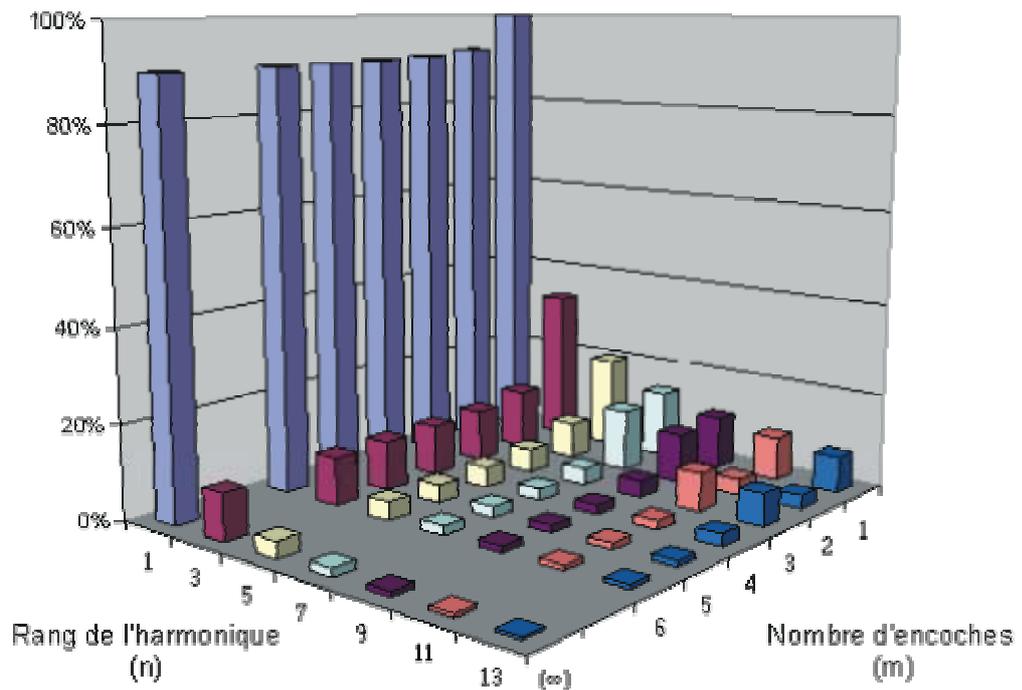


Figura 2



Para uma máquina trifásica de enrolamentos a - a', b - b' et c - c', o ângulo α máximo que se pode considerar é de 60° (figura 3).

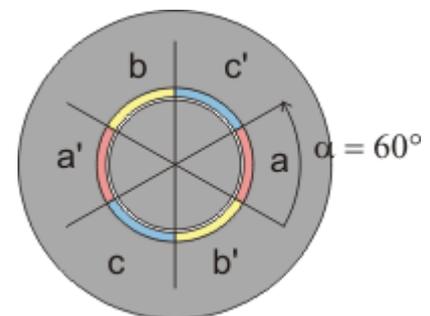


Figura 3

Para este ângulo, a terceira harmónica é bem superior ao caso precedente pois representa 24,4% (para $m = 2$) a 22,2% (para $m \rightarrow \infty$) da amplitude da componente fundamental do campo. No entanto, esta componente não tem qualquer influência; na realidade, sendo trifásico o sistema de correntes de alimentação (é nula a soma das correntes i_1, i_2 e i_3 das fases), mostra-se que é nula a terceira harmónica da soma das componentes criadas por cada um dos enrolamentos :

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^3 H_{3,j} &= -\frac{2N}{3\pi e} \cdot \sum_{j=1}^3 i_j \cdot \cos 3 \left(\theta - \frac{2(j-1)\pi}{3} \right) \\
 &= -\frac{2N}{3\pi e} \cdot \cos 3\theta \cdot \sum_{j=1}^3 i_j \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

A quinta harmónica fica reduzida para um valor compreendido entre 5,4% (para $m = 2$) e 4,0% (para $m \rightarrow \infty$) da fundamental. É a primeira componente harmónica significativa e, mesmo para um enrolamento pouco distribuído ($m=2$), apresenta um valor 2,6 mais baixo do que a primeira componente harmónica significativa de uma máquina bifásica.

Verifica-se, ainda, que todas as outras componentes harmónicas apresentam amplitudes mais baixas do que a quinta harmónica; H_7 , por exemplo, não ultrapassa (para $m = 2$), 3,8% da componente fundamental.

Salienta-se que esta redução da taxa harmónica se faz à custa de uma redução de apenas 3,4% (para $m = 2$) a 4,5% (para $m \rightarrow \infty$) da componente fundamental do campo.

Tabela das amplitudes relativas das diferentes harmónicas para $\alpha=60^\circ$

		Ordem da harmónica						
		1	3	5	7	9	11	13
Número de cavas	1	100,0%	33,3%	20,0%	14,3%	11,1%	9,1%	7,7%
	2	96,6%	23,6%	5,2%	3,7%	7,9%	8,8%	7,4%
	3	96,0%	22,2%	4,4%	2,5%	3,7%	1,6%	1,7%
	4	95,8%	21,8%	4,1%	2,3%	3,0%	1,1%	1,0%
	5	95,7%	21,6%	4,0%	2,1%	2,7%	1,0%	0,8%
	6	95,6%	21,5%	3,9%	2,1%	2,6%	0,9%	0,7%
	7	95,6%	21,4%	3,9%	2,0%	2,5%	0,9%	0,7%
	(∞)	95,5%	21,2%	3,8%	1,9%	2,4%	0,8%	0,6%

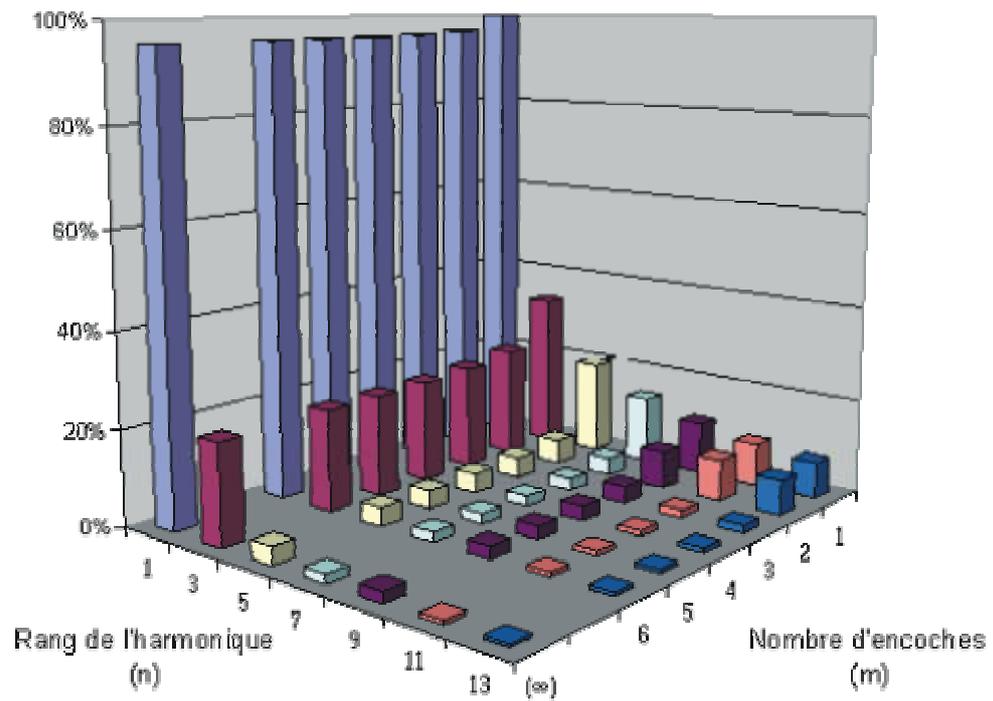


Figura 4

Notas :

¹ para além disso, seria necessário colocar na mesma cava condutores pertencentes a dois enrolamentos diferentes e, portanto, a potenciais diferentes, o que implicaria um nível de isolamento superior, reduzindo assim densidade de corrente nessas cavas o que levaria a um enfraquecimento do campo.

² em vez de 33,3% para um enrolamento concentrado.

³ em vez de 20,0% para um enrolamento concentrado.