



Temática – Circuitos Eléctricos

Capítulo – Regime Sinusoidal

POTÊNCIAS

INTRODUÇÃO

Neste capítulo definem-se, sucessivamente, as diversas potências em jogo nos regimes sinusoidais. Partindo da evolução temporal da tensão e corrente aos terminais de um dipolo eléctrico define-se potência instantânea, cujo valor médio ao longo de um período corresponde à potência activa transferida para o circuito. Com base nas amplitudes complexas da tensão e da corrente, define-se potência complexa e potência reactiva, evidenciando a relação entre elas através do diagrama do triângulo de potências. A concretização destes conceitos é feita através do cálculo das potências em jogo em cada um dos elementos ideais dos circuitos eléctricos.

- Pré-requisitos: [Circuitos em Regime Sinusoidal](#)
- Nivel : Bases de Engenharia Electrotécnica
- Duração estimada: 30 minutos
- Autor: [Maria José Resende](#)
- Realização: [Sophie Labrique](#)



Este projecto é financiado pela União Europeia no âmbito de uma acção Sócrates-Minerva. As informações nele contidas são da exclusiva responsabilidade dos seus autores. A União Europeia declina toda a responsabilidade relativamente ao seu uso.

1. POTÊNCIA INSTANTÂNEA

Considere-se o dipolo representado na figura, onde os sentidos de referência da corrente e tensão se apresentam segundo a convenção receptor.

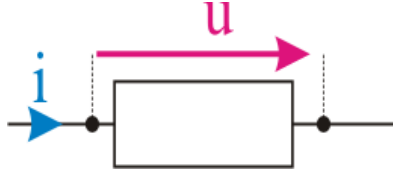


Figura 1 – Dipolo eléctrico; convenção receptor

Sendo a tensão e a corrente grandezas alternadas sinusoidais descritas pelas expressões:

$$u(t) = U_M \sin(\omega t + \varphi_u) \quad \text{e} \quad i(t) = I_M \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Define-se como **potência instantânea**, $p(t)$, o produto do valor instantâneo da tensão pelo valor instantâneo da corrente:

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t) i(t) \\ &= \frac{U_M I_M}{2} \cos(\varphi_u - \varphi_i) + \frac{U_M I_M}{2} \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) \end{aligned}$$

A potência instantânea é expressa em watts [W]

Atendendo a que as grandezas são alternadas sinusoidais e portanto os seus valores máximos e eficazes são:

$$U_M = \sqrt{2} U_{ef} \quad \text{e} \quad I_M = \sqrt{2} I_{ef}$$

A potência instantânea pode ser reescrita na forma:

$$p(t) = U_{ef} I_{ef} \cos(\varphi_u - \varphi_i) + U_{ef} I_{ef} \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)$$

onde se realça a importância dos valores eficazes das grandezas alternadas sinusoidais na transmissão de potência.

Com base na expressão anterior, pode afirmar-se que a potência instantânea é representada por uma componente sinusoidal de amplitude $U_{ef} I_{ef}$ e que oscila com uma frequência angular dupla da tensão e corrente, $U_{ef} I_{ef} \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)$, em torno de um valor médio representado por, $U_{ef} I_{ef} \cos(\varphi_u - \varphi_i)$.

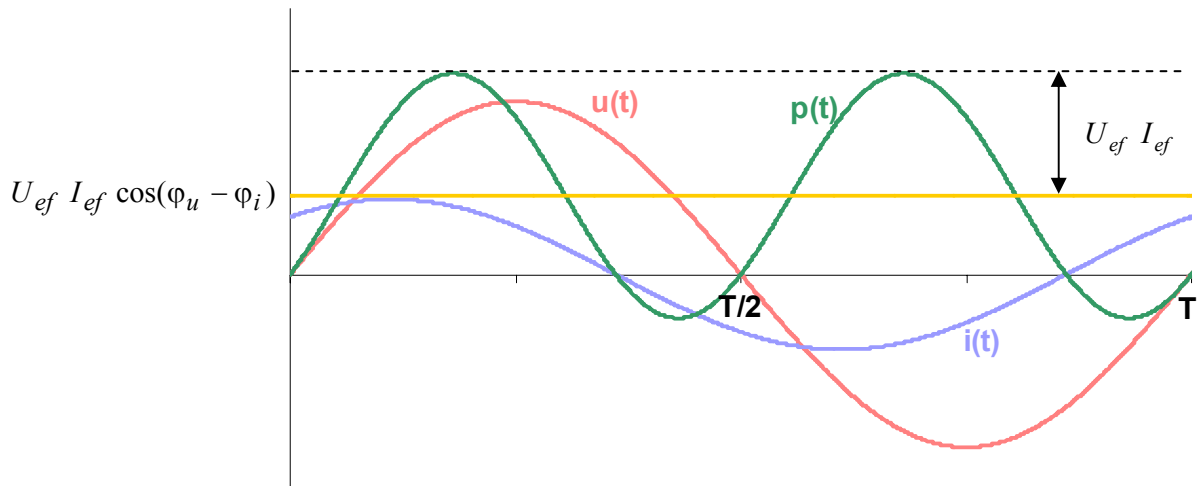


Figura 1 – Diagrama temporal da tensão, corrente e potência instantânea

Define-se **potência activa** ou **potência real**, P , como o valor médio da potência instantânea durante um período ou um número inteiro de períodos.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = U_{ef} I_{ef} \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$

A potência activa também se expressa em watts [W]

2. POTÊNCIA COMPLEXA

Fazendo uso das amplitudes complexas da tensão e corrente de um dipolo, define-se **potência complexa**, $\bar{S}$, o produto da amplitude complexa eficaz da tensão pelo conjugado da amplitude complexa eficaz da corrente.

$$\bar{S} = \bar{U}_{ef} \bar{I}_{ef}^*$$

onde $\bar{I}_{ef}^*$ representa o complexo conjugado de $\bar{I}_{ef}$.

Sendo as amplitudes complexas:

$$U_{ef} e^{j\varphi_u} \quad \text{e} \quad I_{ef} e^{j\varphi_i}$$

A potência complexa pode ser escrita na forma:

$$\bar{S} = U_{ef} I_{ef} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = U_{ef} I_{ef} \cos \varphi + j U_{ef} I_{ef} \sin \varphi$$

onde $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

É possível identificar na expressão anterior, a potência activa (ou real), P , definida na secção anterior; por analogia, define-se a **potência reactiva** (ou imaginária) e representa-se por Q :

$$Q = U_{ef} I_{ef} \sin \varphi$$

A potência reactiva expressa-se em volt ampere reactivo [var].

A potência complexa pode, então, ser reescrita na forma:

$$\bar{S} = P + jQ$$

e representada graficamente pelo designado **triângulo de potências**, representado na figura seguinte.

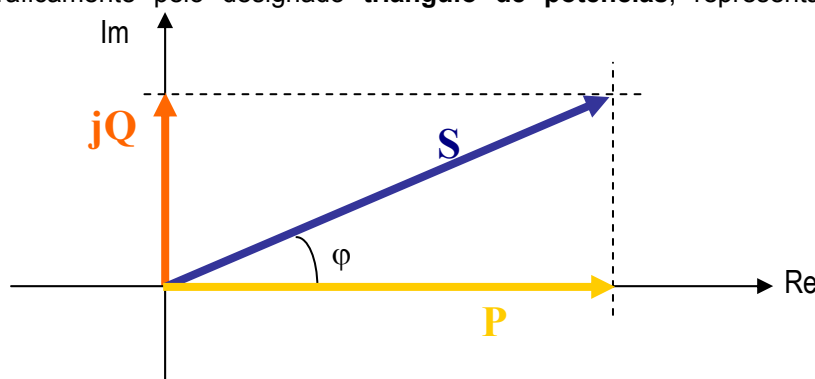


Figura 2 – Triângulo de potências

Saliente-se que tanto a potência activa P , quanto a potência reactiva Q , assumem valores reais; apenas a potência complexa assume valores no conjunto dos números complexos.

Os vectores que representam as potências activa, reactiva e complexa não são vectores girantes pois a sua evolução no tempo não é sinusoidal; para uma dada corrente e tensão sinusoidais (que podem ser representadas por vectores girantes), as potências activa, reactiva e complexa assumem valores constantes (que não são representadas por vectores girantes).

O módulo da potência complexa, $U_{ef} I_{ef}$, designa-se por **potência aparente**, representa-se por S e expressa-se em volt ampere [VA].

O **factor de potência**, fp , é definido como a razão entre a potência activa e a potência aparente.

$$fp = \frac{P}{S}$$

O factor de potência é uma grandeza adimensional e, apenas no caso de regimes sinusoidais, tem um valor idêntico a $\cos \varphi$.

A tabela seguinte resume algumas expressões relativas às grandezas definidas nesta secção.

Potência Complexa	$\bar{S}$	$\bar{U}_{ef} \bar{I}_{ef}^*$	-	-
Potência Aparente	S	$U_{ef} I_{ef} = \sqrt{P^2 + Q^2}$	volt ampere	[VA]
Potência Activa	P	$\text{Re}\{\bar{S}\} = S \cos \varphi = U_{ef} I_{ef} \cos \varphi$	watt	[W]
Potência Reactiva	Q	$\text{Im}\{\bar{S}\} = S \sin \varphi = U_{ef} I_{ef} \sin \varphi$	volt ampere reactivo	[var]
Factor de Potência	fp	$\frac{P}{S}$	-	-

3. POTÊNCIA EM ELEMENTOS IDEAIS

RESISTÊNCIA

No caso particular de uma resistência, tensão e corrente aos seus terminais estão em fase pelo que:

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$$

Sendo a expressão para a potência instantânea:

$$p(t) = U_{ef} I_{ef} + U_{ef} I_{ef} \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)$$

cujo valor médio (potência activa) é:

$$P = U_{ef} I_{ef}$$

ANIMAÇÃO

Como a expressão que relaciona a tensão e corrente numa resistência é

$$u(t) = R i(t)$$

também se terá, atendendo ao conceito de valor eficaz,

$$U_{ef} = R I_{ef}$$

pelo que a expressão para a potência instantânea pode tomar a forma

$$p(t) = R (I_{ef})^2 + R (I_{ef})^2 \cos(2\omega t + 2\varphi_u)$$

Graficamente, a evolução temporal da tensão, corrente, potência instantânea e potência activa absorvidas por uma resistência, encontram-se representados na figura seguinte, onde se considerou $\varphi_u = 0$.

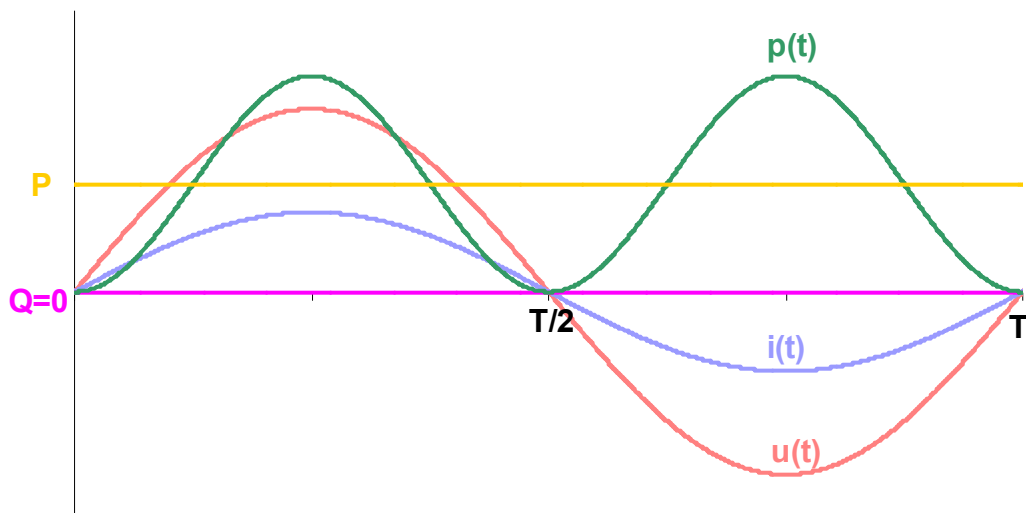


Figura 3 – $u(t)$, $i(t)$, $p(t)$, P e Q absorvidas por uma resistência

Como no caso da resistência se tem $\varphi = 0$, obtém-se:

$$\bar{S} = U_{ef} I_{ef} e^{j0} = U_{ef} I_{ef}$$

$$P = \text{Re}\{\bar{S}\} = U_{ef} I_{ef}$$

$$Q = \text{Im}\{\bar{S}\} = 0$$

$$fp = \frac{P}{S} = 1$$



Figura 4 – Diagrama vectorial das potências absorvidas por uma resistência

Como se considerou a convenção receptor para o dipolo, conclui-se que a resistência absorve potência activa (de valor numericamente igual à potência aparente). Uma resistência não absorve potência reactiva.

INDUTÂNCIA

No caso particular de uma indutância, a corrente encontra-se atrasada $\frac{\pi}{2}$ relativamente à tensão, pelo que:

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}$$

Sendo a expressão para a potência instantânea:

$$p(t) = U_{ef} I_{ef} \cos(2\omega t + 2\varphi_u - \frac{\pi}{2})$$

cujo valor médio é nulo.

Graficamente, a evolução temporal da tensão, corrente, potência instantânea e potência activa, absorvidas por uma indutância, encontram-se representados na figura seguinte, onde se considerou $\varphi_u = 0$.

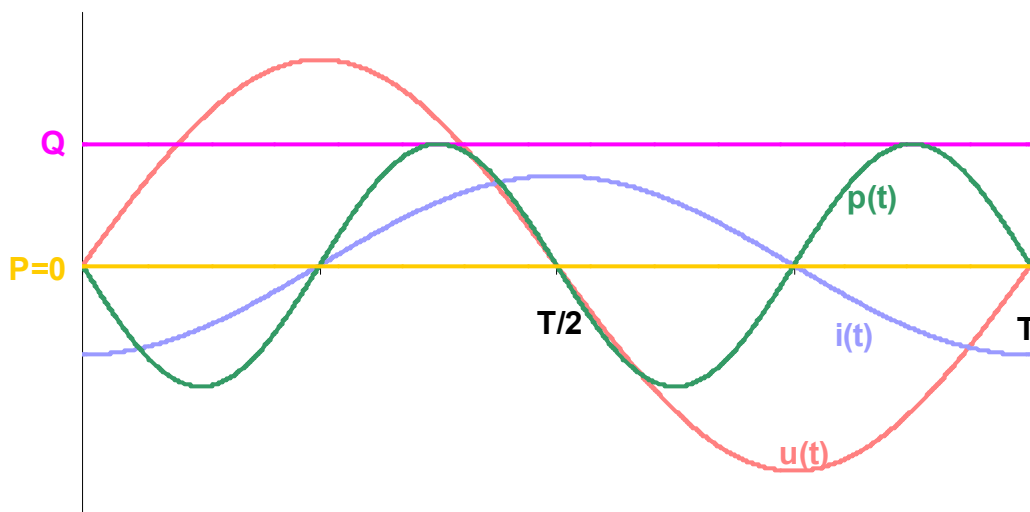


Figura 5 – $u(t)$, $i(t)$, $p(t)$, P e Q absorvidas por uma indutância

Como para o caso da indutância se tem $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

$$\bar{S} = U_{ef} I_{ef} e^{j\frac{\pi}{2}} = 0 + jU_{ef} I_{ef}$$

$$P = \text{Re}\{\bar{S}\} = 0$$

$$Q = \text{Im}\{\bar{S}\} = U_{ef} I_{ef}$$

$$fp = \frac{P}{S} = 0$$

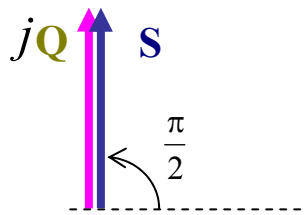


Figura 6 – Diagrama vectorial das potências absorvidas por uma indutância

Como se considerou a convenção receptor para o dipolo, conclui-se que a indutância absorve potência reactiva (de valor numericamente igual à potência aparente). Uma indutância não absorve potência activa.

CAPACIDADE

No caso particular de uma capacidade, a corrente encontra-se avançada $\frac{\pi}{2}$ relativamente à tensão, pelo que:

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}$$

Sendo a expressão para a potência instantânea:

$$p(t) = U_{ef} I_{ef} \cos(2\omega t + 2\varphi_u + \frac{\pi}{2})$$

cujo valor médio é nulo.

Graficamente, a evolução temporal da tensão, corrente, potência instantânea e potência activa, absorvidas por uma capacidade, encontram-se representados na figura seguinte, onde se considerou $\varphi_u = 0$.

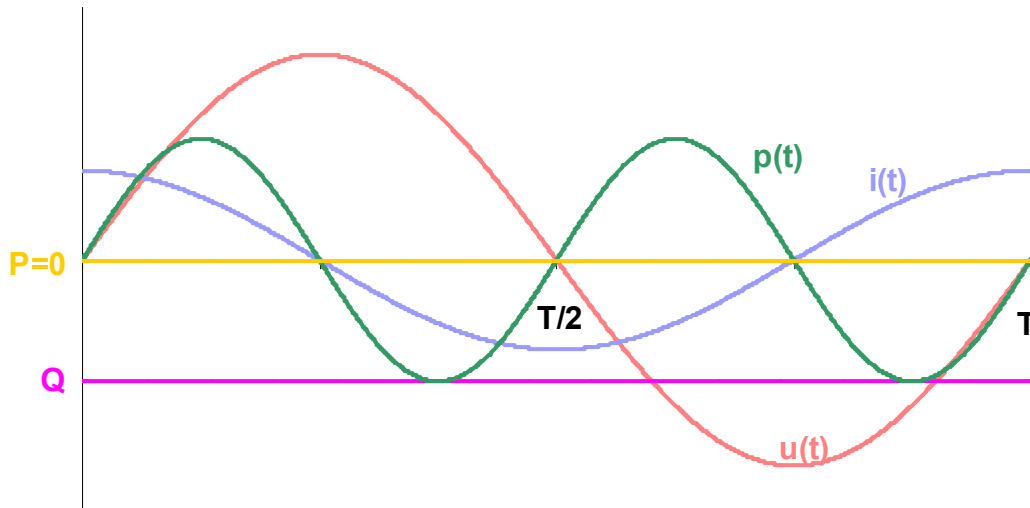


Figura 7 – $u(t)$, $i(t)$, $p(t)$, P e Q absorvidas por uma capacidade

Como para o caso da capacidade se tem $\varphi = -\frac{\pi}{2}$,

$$\bar{S} = U_{ef} I_{ef} e^{-j\frac{\pi}{2}} = 0 - jU_{ef} I_{ef}$$

$$P = \text{Re}\{\bar{S}\} = 0$$

$$Q = \text{Im}\{\bar{S}\} = -U_{ef} I_{ef}$$

$$fp = \frac{P}{S} = 0$$

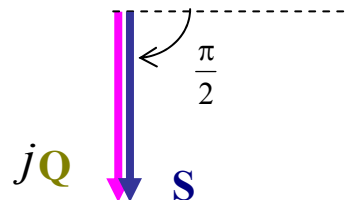


Figura 8 – Diagrama vectorial das potências absorvidas por uma capacidade

Como se considerou a convenção receptor para o dipolo, conclui-se que a capacidade absorve potência reactiva negativa (de valor numericamente igual à potência aparente), o que significa que a capacidade fornece potência reactiva. Uma capacidade não absorve nem fornece potência activa.

4. CIRCUITO RL SÉRIE

Considere-se o circuito RL série alimentado por uma fonte de tensão alternada sinusoidal cuja tensão é descrita pela expressão $e(t) = \sqrt{2} E_{ef} \sin(\omega t)$

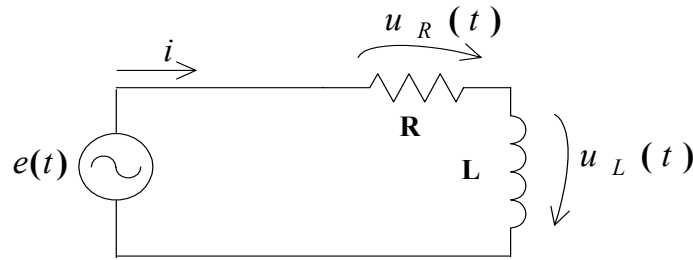


Figura 9– Esquema do circuito RL série

Conhecidos os valores de R e L , determinaram-se já (ver Circuito RL série) as expressões da impedância total do circuito e da corrente que ele absorve em regime permanente, considerando que a amplitude complexa da tensão tem uma fase nula na origem, isto é, $\bar{E} = \sqrt{2} E_{ef} e^{j0}$.

$$\bar{I}(t) = \frac{\sqrt{2} E_{ef}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{-j\varphi} = \sqrt{2} I_{ef} e^{-j\varphi} \quad \text{com } \varphi = \arctan \frac{\omega L}{R} \quad \text{e } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

A potência complexa deste circuito (isto é, a potência que a fonte deverá apresentar para alimentar este circuito) será dada por

$$\bar{S} = \bar{E}_{ef} (\bar{I}_{ef})^*$$

Atendendo às amplitudes complexas da tensão e da corrente, a potência complexa é dada por

$$\bar{S} = (E_{ef} e^{j0}) (I_{ef} e^{-j\varphi})^* = E_{ef} I_{ef} e^{j\varphi}$$

Pelo que as potências activa, reactiva e aparente são:

$$P = E_{ef} I_{ef} \cos \varphi$$

$$Q = E_{ef} I_{ef} \sin \varphi$$

$$S = E_{ef} I_{ef}$$

Como $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, todas estas potências assumem valores positivos.

Conhecendo as amplitudes complexas das tensões aos terminais de cada elemento, $\bar{U}_R$ e $\bar{U}_L$ (ver Circuito RL série), pode calcular-se a potência de cada um dos elementos do circuito (elemento R e elemento L).

Sendo $\bar{U}_R = \frac{\sqrt{2} R E_{ef}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{-j\varphi} = \sqrt{2} U_{R\,ef} e^{-j\varphi}$, a potência complexa associada à resistência é:

$$\bar{S}_R = \left(\frac{R E_{ef}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{-j\varphi} \right) (I_{ef} e^{-j\varphi})^* = E_{ef} I_{ef} \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{j0}$$

Como $\frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \cos \varphi$ (ver Figura 2 de Circuito RL série), conclui-se que:

$$\bar{S}_R = E_{ef} I_{ef} \cos \varphi = P$$

Isto é, a **potência activa** em jogo no circuito está apenas **associada à presença da resistência**.

Analogamente, para a bobine tem-se $\bar{U}_L = \frac{\sqrt{2} \omega L E_{ef}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{-j\varphi + \frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} U_{L\,ef} e^{-j\varphi + \frac{\pi}{2}}$. Pelo

que a potência complexa associada à bobine é:

$$\bar{S}_L = \left(\frac{\omega L E_{ef}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{-j\varphi + \frac{\pi}{2}} \right) (I_{ef} e^{-j\varphi})^* = E_{ef} I_{ef} \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Como $\frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \sin \varphi$ (ver Figura 2 de Circuito RL série), conclui-se que:

$$\bar{S}_L = E_{ef} I_{ef} \sin \varphi = Q$$

Isto é, a **potência reactiva** em jogo no circuito está apenas **associada à presença da bobine**.

Como num **circuito RL série** $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, isto é, a impedância complexa é representada por um vector no 1º Quadrante, a **potência reactiva assume valores positivos**; o circuito consome energia reactiva da fonte de tensão.

5. CIRCUITO RC SÉRIE

Considere-se o circuito **RC** série alimentado por uma fonte de tensão alternada sinusoidal cuja tensão é descrita pela expressão $e(t) = \sqrt{2} E_{ef} \sin(\omega t)$

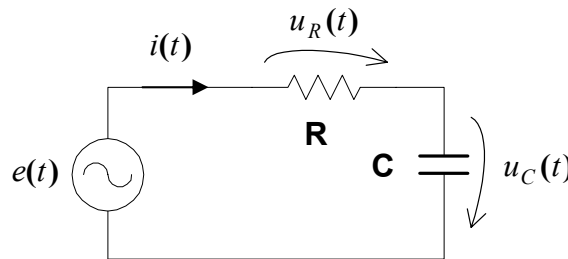


Figura 10– Esquema do circuito RC série

Conhecidos os valores de R e C , determinaram-se já (ver Circuito RC série) as expressões da impedância total do circuito e da corrente que ele absorve em regime permanente, considerando que a amplitude complexa da tensão tem uma fase nula na origem, isto é, $\bar{E} = \sqrt{2} E_{ef} e^{j0}$.

$$\bar{I}(t) = \frac{\sqrt{2} E_{ef}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} e^{-j\varphi} = \sqrt{2} I_{ef} e^{-j\varphi} \quad \text{com } \varphi = \arctan \frac{1}{\omega RC} \quad \text{e } -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$$

A potência complexa deste circuito (isto é, a potência que a fonte deverá apresentar para alimentar este circuito) será dada por

$$\bar{S} = \bar{E}_{ef} (\bar{I}_{ef})^*$$

Atendendo às amplitudes complexas da tensão e da corrente, a potência complexa é dada por

$$\bar{S} = (E_{ef} e^{j0}) (I_{ef} e^{-j\varphi})^* = E_{ef} I_{ef} e^{j\varphi}$$

Pelo que as potências activa, reactiva e aparente são:

$$P = E_{ef} I_{ef} \cos \varphi$$

$$Q = E_{ef} I_{ef} \sin \varphi$$

$$S = E_{ef} I_{ef}$$

Como $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$, as potências P e S assumem valores positivos mas a potência Q assume um valor negativo.

Conhecendo as amplitudes complexas das tensões aos terminais de cada elemento, $\bar{U}_R$ e $\bar{U}_C$ (ver Circuito RC série), pode calcular-se a potência de cada um dos elementos do circuito (elemento R e elemento C).

Sendo $\bar{U}_R = \frac{\sqrt{2} R E_{ef}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} e^{-j\varphi} = \sqrt{2} U_{R\,ef} e^{-j\varphi}$, a potência complexa associada à resistência é:

$$\bar{S}_R = \left(\frac{R E_{ef}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} e^{-j\varphi} \right) (I_{ef} e^{-j\varphi})^* = E_{ef} I_{ef} \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} e^{j0}$$

Como $\frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} = \cos \varphi$ (ver Figura 5 de Circuito RC série), conclui-se que:

$$\bar{S}_R = E_{ef} I_{ef} \cos \varphi = P$$

Isto é, a **potência activa** em jogo no circuito está apenas **associada à presença da resistência**.

Analogamente, para o condensador tem-se:

$$\bar{U}_C = \frac{1}{\omega C} \frac{\sqrt{2} E_{ef}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} e^{-j\varphi - \frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} U_{C\,ef} e^{-j\varphi - \frac{\pi}{2}}$$

Pelo que a potência complexa associada ao condensador é:

$$\bar{S}_C = \left(\frac{1}{\omega C} \frac{E_{ef}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} e^{-j\varphi - \frac{\pi}{2}} \right) (I_{ef} e^{-j\varphi})^* = E_{ef} I_{ef} \frac{1}{\omega C} \frac{1}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Como $\frac{1}{\omega C} \frac{1}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} = \sin \varphi$ (ver Figura 5 de Circuito RL série), conclui-se que:

$$\bar{S}_C = E_{ef} I_{ef} \sin \varphi = Q$$

Isto é, a **potência reactiva** em jogo no circuito está apenas **associada à presença do condensador**.

Como num **circuito RC série** $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$, isto é, a impedância complexa é representada por um vector no 4º Quadrante, a **potência reactiva assume valores negativos**; o circuito fornece energia reactiva à fonte de tensão.