e-LEE
e-Learning tools for Electrical Engineering

Temática – Circuitos Eléctricos

Capítulo – Regime Sinusoidal

# CIRCUITOS EM REGIME SINUSOIDAL

## INTRODUÇÃO

Neste capítulo, analisa-se o regime permanente em circuitos alimentados em corrente alternada. Deduzem-se as equações características dos elementos ideais R, L e C em termos de amplitudes complexas e apresenta-se o conceito de impedância complexa. São analisados os circuitos RL série e RC série, determinando-se as tensões e correntes pelo método das amplitudes complexas. Generaliza-se para a associação de impedâncias, as expressões deduzidas para a associação de resistências.

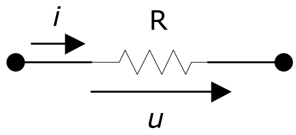
- Pré-requisitos: Grandezas Sinusoidais
- Nivel : Bases de Engenharia Electrotécnica
- Duração estimada: 30 minutos
- Autor: Maria José Resende
- Realização: Sophie Labrique

Este projecto é financiado pela União Europeia no âmbito de uma acção Sócrates-Minerva. As informações nele contidas são da exclusiva responsabilidade dos seus autores. A União Europeia declina toda a responsabilidade relativamente ao seu uso.

## 1. ELEMENTOS IDEAIS

### RESISTÊNCIA

Considere-se uma resistência cujos sentidos de referência para a tensão e corrente se encontram representados na figura seguinte.




Admitindo que a corrente que percorre a resistência é alternada sinusoidal representada pela expressão:

$$i(t) = I_M \sin(\omega t + \varphi)$$

através da equação característica da resistência, $u = Ri$ é possível determinar a tensão aos seus terminais:

$$u(t) = R\, i(t) = RI_M \sin(\omega t + \varphi) = U_M \sin(\omega t + \varphi)$$

A tensão aos terminais da resistência também é uma grandeza alternada sinusoidal de frequência angular $\omega$, está em fase com $i(t)$ e apresenta uma amplitude dada por $R\, I_M$ .

Em notação complexa, o vector girante representativo de $i(t)$ é:

$$\overline{I}_M(t) = I_M e^{j(\omega t + \varphi)}$$

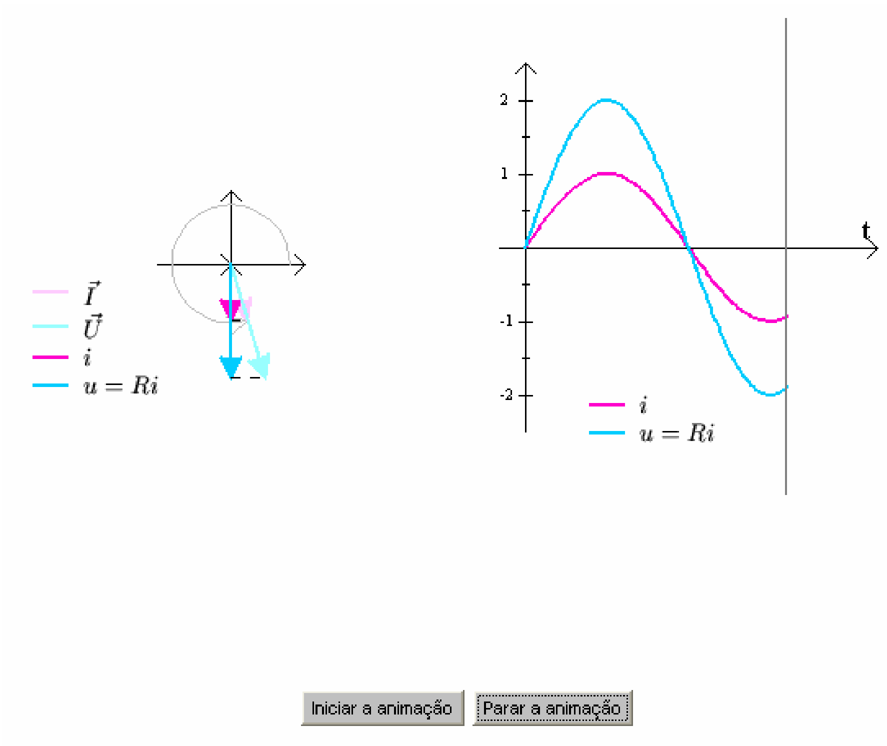
e, através da equação característica, o vector girante da tensão, $\overline{U}_M(t)$ será:

$$\overline{U}_M(t) = R\, I_M e^{j(\omega t + \varphi)}$$
$$= U_M e^{j(\omega t + \varphi)}$$

O vector girante da tensão apresenta a mesma frequência angular de $\overline{I}_M(t)$ e é colinear com este; obtém-se $u(t)$ fazendo a projecção deste vector sobre o eixo dos Imaginários.

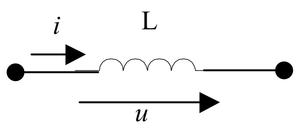
Numa resistência, a tensão aos seus terminais e a corrente que a percorre estão em fase.

A figura seguinte representa a evolução temporal e o diagrama vectorial da tensão e corrente aos terminais da resistência.




INDUTÂNCIA

Considere-se uma indutância cujos sentidos de referência para a tensão e a corrente se encontram representados na figura seguinte.




Admitindo que a corrente que percorre a indutância é alternada sinusoidal representada pela expressão:

$$i(t) = I_M \sin(\omega t + \varphi)$$

através da equação característica da indutância, $u = L\dfrac{di}{dt}$ é possível determinar a tensão aos seus terminais:

$$\begin{aligned} u(t) &= L\frac{d}{dt}\left[ I_M \sin(\omega t + \varphi) \right] \\ &= \omega L I_M \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \\ &= U_M \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

A tensão aos terminais da indutância também é uma grandeza alternada sinusoidal de frequência angular $\omega$, está avançada $\dfrac{\pi}{2}$ relativamente $i(t)$ e apresenta uma amplitude de $\omega L\, I_M$.

Em notação complexa, o vector girante representativo de $i(t)$ é:

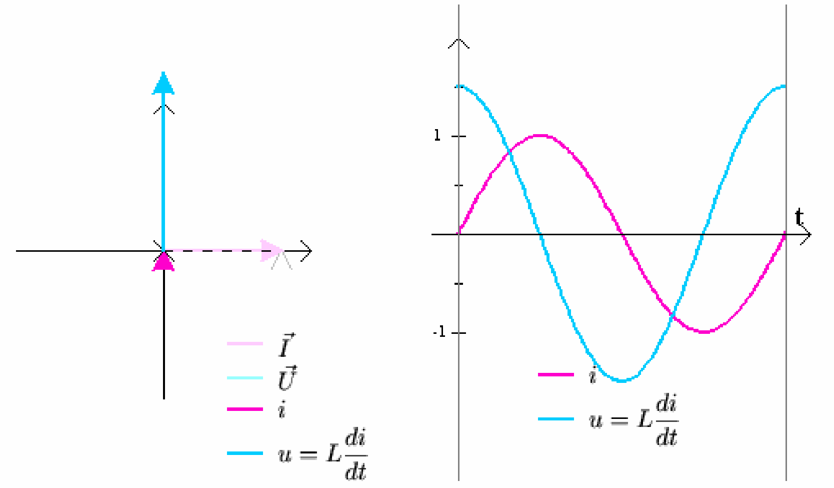
$$\overline{I}_M(t) = I_M e^{j(\omega t + \varphi)}$$

e, através da equação característica, o vector girante da tensão, $\overline{U}_M(t)$ será:

$$\begin{aligned}\overline{U}_M(t) &= L\frac{d}{dt}\left[I_M e^{j(\omega t+\varphi)}\right] \\ &= j\omega L I_M e^{j(\omega t+\varphi)} \\ &= \omega L I_M e^{j(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})} \\ &= U_M e^{j(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})}\end{aligned}$$

O vector girante da tensão apresenta a mesma frequência angular de $\overline{I}_M(t)$ e está avançado $\frac{\pi}{2}$ relativamente a este; obtém-se $u(t)$ fazendo a projecção deste vector sobre o eixo dos Imaginários.

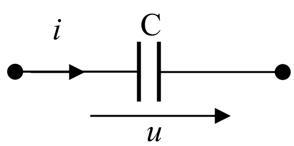
A figura seguinte representa a evolução temporal e o diagrama vectorial da tensão e corrente aos terminais da resistência.





CAPACIDADE

Considere-se uma capacidade cujos sentidos de referência para a tensão e corrente se encontram representados na figura seguinte.



Admitindo que a corrente que percorre a indutância é alternada sinusoidal representada pela expressão:

$$i(t) = I_M \sin(\omega t + \varphi)$$

através da equação característica da capacidade, $i = C\dfrac{du}{dt}$ é possível determinar a tensão aos seus terminais:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{C}\int \left[ I_M \sin(\omega t + \varphi) \right] dt \\ &= \frac{I_M}{\omega C} \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) \\ &= I_M \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

A tensão aos terminais da capacidade também é uma grandeza alternada sinusoidal de frequência angular $\omega$, está atrasada $\dfrac{\pi}{2}$ relativamente $i(t)$ e apresenta uma amplitude de $\dfrac{I_M}{\omega C}$.

Em notação complexa, o vector girante representativo de $i(t)$ é:

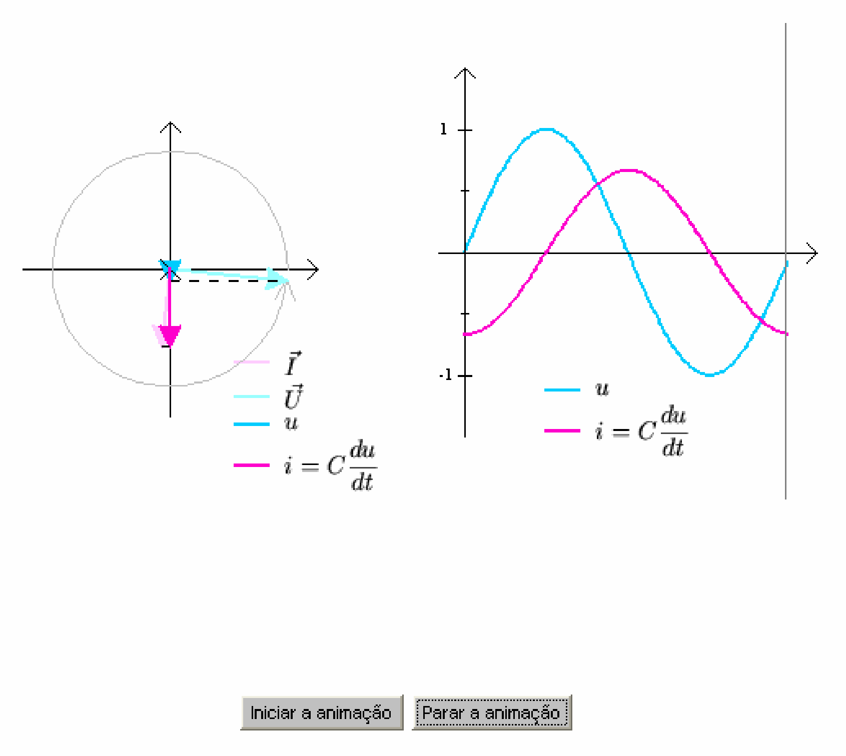
$$\overline{I}_M(t) = I_M e^{j(\omega t + \varphi)}$$

e, através da equação característica, o vector girante da tensão, $\overline{U}_M(t)$ será:

$$\begin{aligned} \overline{U}_M(t) &= \frac{1}{C}\int \left[ I_M e^{j(\omega t + \varphi)} \right] dt \\ &= \frac{1}{j\omega C} I_M e^{j(\omega t + \varphi)} \\ &= \frac{1}{\omega C} I_M e^{j(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})} \\ &= U_M e^{j(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})} \end{aligned}$$

O vector girante da tensão apresenta a mesma frequência angular de $\overline{I}_M(t)$ e está atrasado $\dfrac{\pi}{2}$ relativamente a este; obtém-se $u(t)$ fazendo a projecção deste vector sobre o eixo dos Imaginários.

A figura seguinte representa a evolução temporal e o diagrama vectorial da tensão e corrente aos terminais da resistência.




## 2. CONCEITO DE IMPEDÂNCIA COMPLEXA

Através da notação complexa e admitindo que o vector girante da corrente que percorria cada um dos elementos era representado pela expressão:

$$\overline{I}_M(t) = I_M e^{j(\omega t+\varphi)}$$

obtiveram-se, na secção anterior as seguintes expressões para os vectores girantes das tensões, respectivamente, na resistência, indutância e capacidade:

| Resistência | Indutância | Capacidade |
|---|---|---|
| $\overline{U}_M(t) = R\, I_M e^{j(\omega t+\varphi)}$ | $\overline{U}_M(t) = j\,\omega L\, I_M e^{j(\omega t+\varphi)}$ | $\overline{U}_M(t) = \frac{1}{j\,\omega C} I_M e^{j(\omega t+\varphi)}$ |

Atendendo à expressão de $\overline{I}_M(t)$, as expressões anteriores podem reescrever-se na forma:

| Resistência | Indutância | Capacidade |
|---|---|---|
| $\overline{U}_M(t) = R\, \overline{I}_M(t)$ | $\overline{U}_M(t) = j\,\omega L\, \overline{I}_M(t)$ | $\overline{U}_M(t) = \frac{1}{j\,\omega C} \overline{I}_M(t)$ |

Define-se **impedância complexa,** $\overline{Z}$ , a razão entre os vectores girantes da tensão e da corrente:

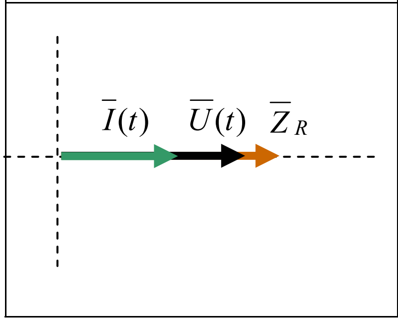
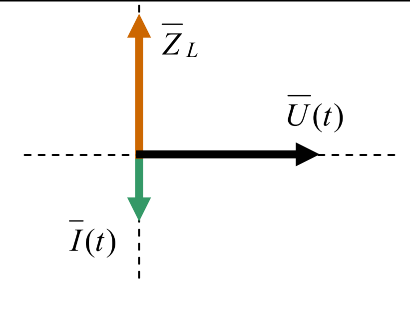
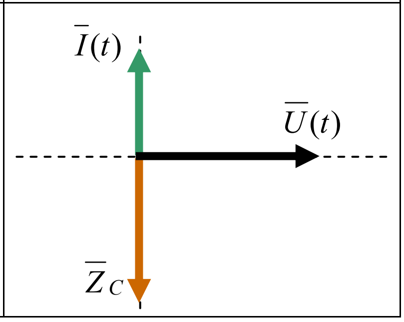
$$\overline{Z} = \frac{\overline{U}_M}{\overline{I}_M}$$

Explicitando a impedância complexa de cada um dos elementos R, L e C, obtém-se:

| Resistência | Indutância | Capacidade |
|---|---|---|
| $\overline{Z}_R = R = R\, e^{j0}$ | $\overline{Z}_L = j\omega L = \omega L\, e^{j\frac{\pi}{2}}$ | $\overline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C}\, e^{-j\frac{\pi}{2}}$ |

Uma impedância complexa expressa-se em Ohm $[\Omega]$

Pode representar-se vectorialmente as impedâncias e as amplitudes complexas de cada um dos elementos.

| Resistência | Indutância | Capacidade |
|---|---|---|
|   |   |   |

Note-se que a impedância não é um vector girante, pois não está a representar qualquer grandeza alternada sinusoidal.

Saliente-se, também, o facto de as impedâncias das indutâncias e dos condensadores se alterar com a frequência de alimentação do circuito, contrariamente ao que acontece com a impedância da resistência

Como a tensão e a corrente aos terminais de um elemento oscilam com a mesma frequência $\omega$, o termo $e^{j\omega t}$ pode ser suprimido das equações características dos elementos escritas em notação vectorial, simplificando-se a notação. As equações ficarão escritas, não em termos de vectores girantes, mas sim de amplitudes complexas, isto é, a representação do vector girante no instante $t = 0$.

| Resistência | Indutância | Capacidade |
|---|---|---|
| $\overline{U}_R = \overline{Z}_R\, \overline{I}_R$ | $\overline{U}_L = \overline{Z}_L\, \overline{I}_L$ | $\overline{U}_C = \overline{Z}_C\, \overline{I}_C$ |

3. CIRCUITO RL SÉRIE

Considere-se o circuito $RL$ série alimentado por uma fonte de tensão alternada sinusoidal cuja tensão é descrita pela expressão $e(t) = E \sin(\omega t)$

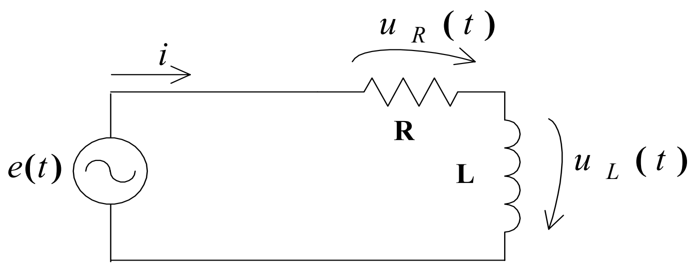



Figura 1– Esquema do circuito RL série

Conhecidos os valores de $R$ e $L$, pretende determinar-se o regime permanente da evolução temporal da corrente no circuito, $i(t)$, e das tensões aos terminais da resistência, $u_R(t)$, e da indutância, $u_L(t)$.

Através da Lei das Malhas, a soma da tensão aos terminais da resistência, com a tensão aos terminais da bobine, igualará a tensão da fonte:

$$e(t) = u_R(t) + u_L(t)$$

Em termos de amplitudes complexas a expressão anterior escreve-se:

$$\begin{aligned} \overline{E} &= R\,\overline{I} + j\omega L\,\overline{I} \\ &= (R + j\omega L)\,\overline{I} \end{aligned}$$

onde $R + j\omega L$ representa a impedância complexa da resistência em série com a indutância.

Explicitando $\overline{I}$ na expressão anterior, obtém-se:

$$\overline{I}(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\, e^{-j\varphi} \quad \text{com } \varphi = \arctan\frac{\omega L}{R} \quad \text{e} \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

O diagrama vectorial da impedância, e amplitudes complexas da tensão da fonte e corrente, está representado na figura seguinte.

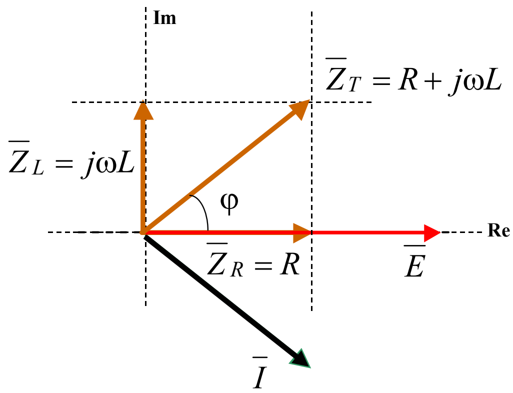



Figura 2 – Diagrama vectorial

Uma vez determinada a corrente, é imediato o cálculo das tensões aos terminais dos elementos:

$$\overline{U}_R = R\,\overline{I} = \frac{R\,E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\,e^{-j\varphi}$$

A amplitude complexa $\overline{U}_R$ é colinear com $\overline{I}$, isto é, tensão e corrente aos terminais da resistência, estão em fase.

Relativamente à tensão aos terminais da bobine, tem-se:

$$\overline{U}_L = j\omega L\,\overline{I} = \frac{\omega L\,E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\,e^{-j\varphi + \frac{\pi}{2}}$$

A amplitude complexa $\overline{U}_L$ está avançada $\frac{\pi}{2}$ relativamente $\overline{I}$, isto é, a tensão aos terminais da bobine está avançada $\frac{\pi}{2}$ relativamente à corrente que a percorre.

O diagrama vectorial completo das tensões e corrente do circuito, encontra-se representado na figura seguinte, onde se evidenciou a lei das Malhas: a soma dos vectores $\overline{U}_L$ e $\overline{U}_R$ iguala o vector $\overline{E}$.

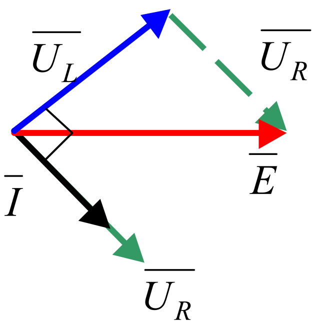



Figura 3 – Diagrama vectorial do circuito RL série

Para se obterem as expressões das evoluções temporais das grandezas há que determinar os respectivos vectores girantes (multiplicação das amplitudes complexas por $e^{j\omega t}$) e fazer a sua projecção sobre o eixo dos imaginários.

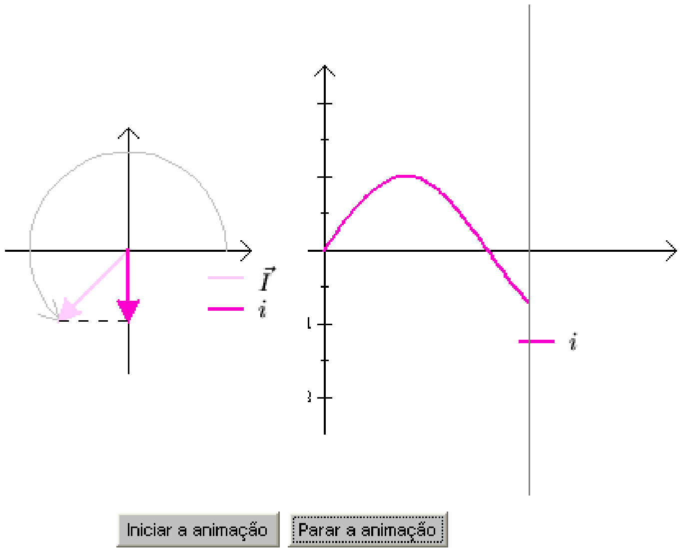
$$i(t) = \mathrm{Im}\left\{\overline{I}(t)\right\} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\sin(\omega t - \varphi)$$

$$u_R(t) = \mathrm{Im}\left\{\overline{U}_R(t)\right\} = \frac{R\,E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\sin(\omega t - \varphi)$$

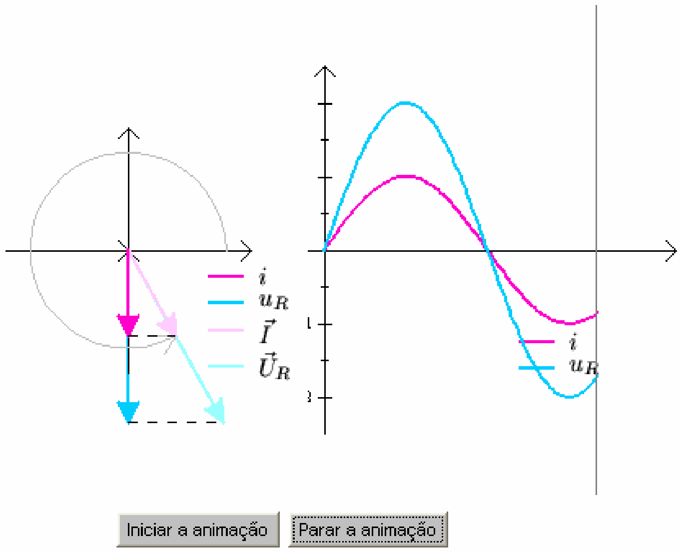
$$u_L(t) = \mathrm{Im}\left\{\overline{U}_L(t)\right\} = \frac{\omega L\,E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\sin(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$\text{com } \varphi = \arctan\frac{\omega L}{R} \quad \text{e} \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

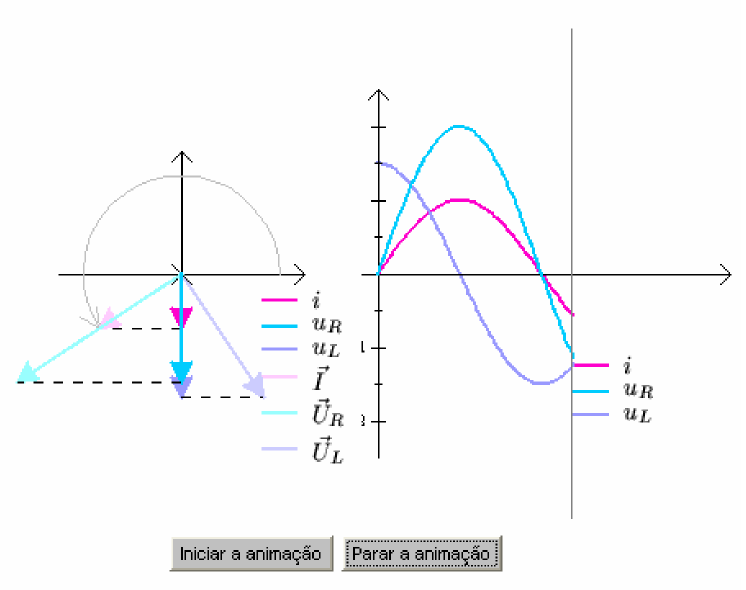
As expressões que foram deduzidas admitiram que a tensão que alimenta o circuito tem uma fase inicial nula. Como exercício, poder-se-á resolver o mesmo circuito RC série, admitindo que é a corrente no circuito que tem uma fase inicial nula, isto é $i(t) = I \sin(\omega t)$ representada pela amplitude complexa $\overline{I}$ .



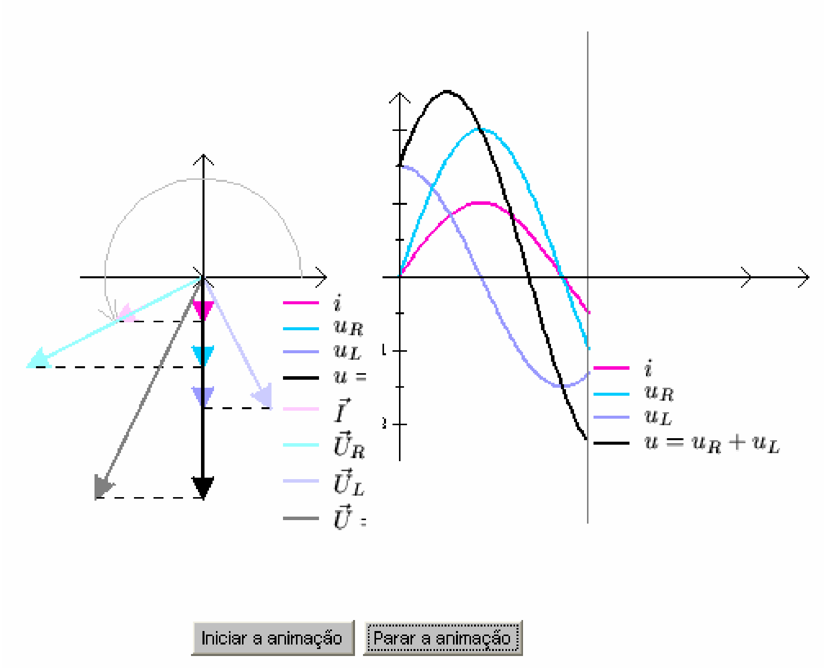

A amplitude complexa $\overline{U}_R$ representando a tensão aos terminais da resistência é colinear com $\overline{I}$ , isto é, tensão e corrente aos terminais da resistência, estão em fase.




Relativamente à amplitude complexa $\overline{U}_L$ , representativa da tensão aos terminais da indutância, está adiantada $\frac{\pi}{2}$ relativamente $\overline{I}$ , isto é, a tensão aos terminais da indutância está adiantada $\frac{\pi}{2}$ relativamente à corrente que a percorre.




Finalmente, os diagramas vectorial e temporal que se obtêm são perfeitamente equivalentes aos obtidos quando se considera a tensão de alimentação com fase inicial nula; apenas diferem no instante a que se referem.




4. CIRCUITO RC SÉRIE

Considere-se o circuito $RC$ série alimentado por uma fonte de tensão alternada sinusoidal cuja tensão é descrita pela expressão $e(t) = E \sin(\omega t)$

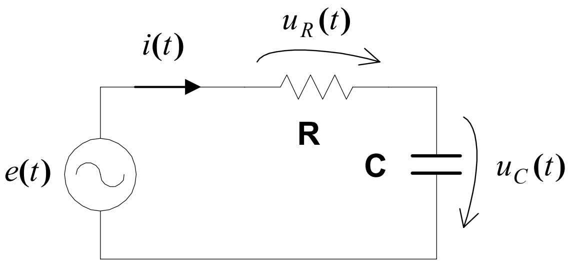



Figura 4 – Esquema do circuito RC série

Conhecidos os valores de $R$ e $C$, pretende determinar-se o regime permanente da evolução temporal da corrente no circuito, $i(t)$, e das tensões aos terminais da resistência, $u_R(t)$, e da capacidade, $u_C(t)$.

Através da Lei das Malhas, a soma da tensão aos terminais da resistência, com a tensão aos terminais da capacidade, igualará a tensão da fonte:

$$e(t) = u_R(t) + u_C(t)$$

Em termos de amplitudes complexas a expressão anterior escreve-se:

$$\overline{E} = R\,\overline{I} + \frac{1}{j\omega C}\,\overline{I} = \left(R - j\frac{1}{\omega C}\right)\overline{I}$$

onde $R - j\dfrac{1}{\omega C}$ representa a impedância complexa da resistência em série com o condensador.

Explicitando $\overline{I}$ na expressão anterior, obtém-se:

$$\overline{I}(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{(\omega C)^2}}}\,e^{-j\varphi} \quad \text{com } \varphi = \arctan\frac{1}{\omega RC} \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$$

O diagrama vectorial das impedâncias, e amplitudes complexas da tensão da fonte e corrente, está representado na figura seguinte.

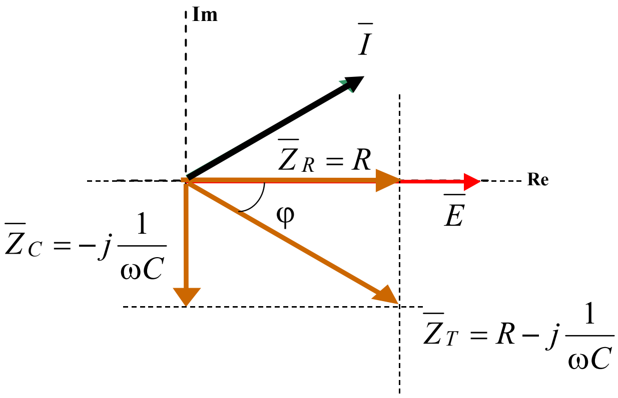



Figura 5 – Diagrama vectorial

Uma vez determinada a corrente, é imediato o cálculo das tensões aos terminais dos elementos:

$$\overline{U}_R = R\,\overline{I} = \frac{R\,E}{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{(\omega C)^2}}}\, e^{-j\varphi}$$

A amplitude complexa $\overline{U}_R$ é colinear com $\overline{I}$, isto é, tensão e corrente aos terminais da resistência, estão em fase.

Relativamente à tensão aos terminais da capacidade, tem-se:

$$\overline{U}_C = -\frac{j}{\omega C}\,\overline{I} = \frac{1}{\omega C}\frac{E}{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{(\omega C)^2}}}\, e^{-j\varphi - \frac{\pi}{2}}$$

A amplitude complexa $\overline{U}_C$ está atrasada $\frac{\pi}{2}$ relativamente $\overline{I}$, isto é, a tensão aos terminais da capacidade está atrasada $\frac{\pi}{2}$ relativamente à corrente que a percorre.

O diagrama vectorial completo das tensões e corrente do circuito, encontra-se representado na figura seguinte, onde se evidenciou a lei das Malhas: a soma dos vectores $\overline{U}_C$ e $\overline{U}_R$ iguala o vector $\overline{E}$.

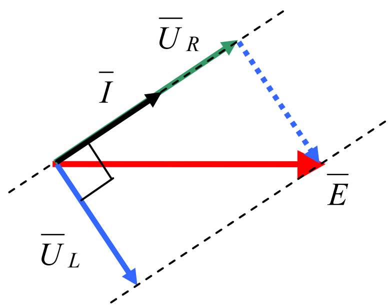



Figura 6 – Diagrama vectorial do circuito RC série

Para se obterem as expressões das evoluções temporais das grandezas há que determinar os respectivos vectores girantes (multiplicação das amplitudes complexas por $e^{j\omega t}$) e fazer a sua projecção sobre o eixo dos imaginários.

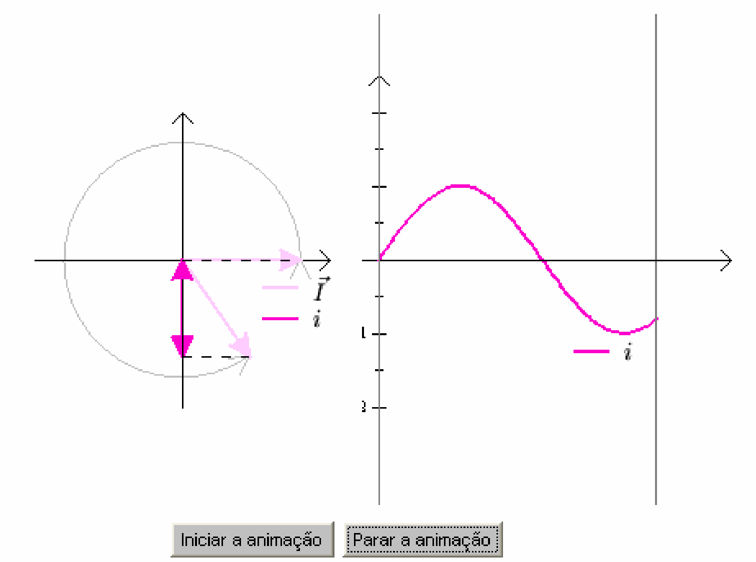
$$i(t) = \mathrm{Im}\{\overline{I}(t)\} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{(\omega C)^2}}}\sin(\omega t - \varphi)$$

$$u_R(t) = \mathrm{Im}\{\overline{U}_R(t)\} = \frac{R\,E}{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{(\omega C)^2}}}\sin(\omega t - \varphi)$$

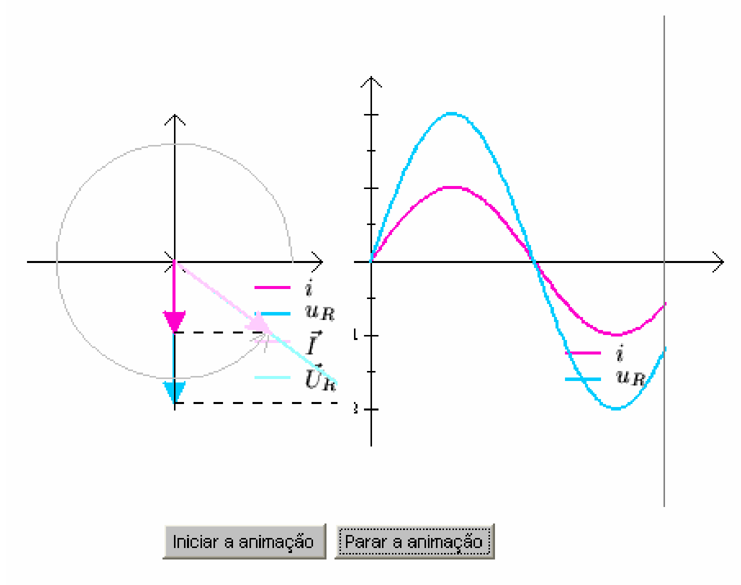
$$u_L(t) = \mathrm{Im}\{\overline{U}_L(t)\} = \frac{\omega L\,E}{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{(\omega C)^2}}}\sin(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2})$$

$$\text{com} \quad \varphi = \arctan\frac{1}{\omega RC} \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$$

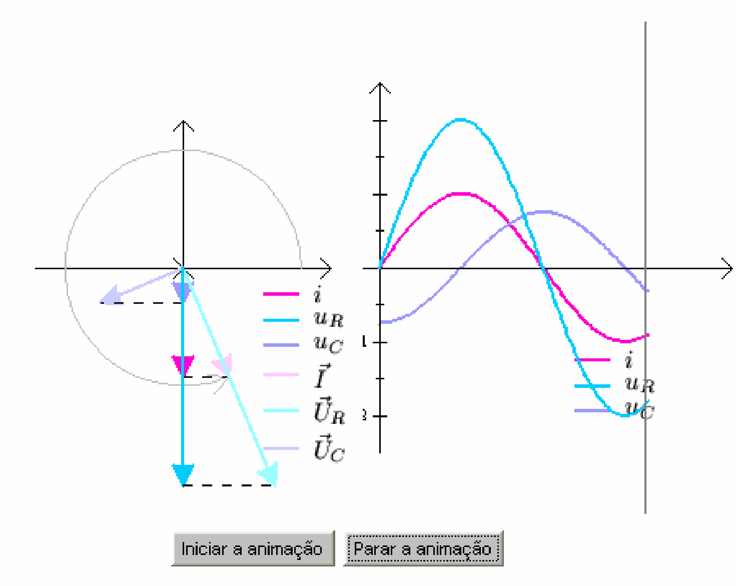
As expressões que foram deduzidas admitiram que a tensão que alimenta o circuito tem uma fase inicial nula. Como exercício, poder-se-á resolver o mesmo circuito RC série, admitindo que é a corrente no circuito que tem uma fase inicial nula, isto é $i(t) = I\,\sin\,(\omega t)$ representada pela amplitude complexa $\overline{I}$




A amplitude complexa $\overline{U}_R$ representando a tensão aos terminais da resistência é colinear com $\overline{I}$, isto é, tensão e corrente aos terminais da resistência, estão em fase.



Relativamente à amplitude complexa $\overline{U}_C$, representativa da tensão aos terminais da capacidade, está atrasada $\frac{\pi}{2}$ relativamente $\overline{I}$, isto é, a tensão aos terminais da capacidade está atrasada $\frac{\pi}{2}$ relativamente à corrente que a percorre.




Finalmente, os diagramas vectorial e temporal que se obtêm são perfeitamente equivalentes aos obtidos quando se considera a tensão de alimentação com fase inicial nula; apenas diferem no instante a que se referem.