



e-Learning tools for Electrical Engineering

Temática – Electrónica de Potência

Capítulo – Onduladores

Secção – Comando por Modulação de Largura de Impulso

ANÁLISE HARMÓNICA DAS TENSÕES DE SAÍDA

INTRODUÇÃO

Neste laboratório virtual efectua-se a análise harmónica das tensões fornecidas por um ondulador comandado por MLI.

- Pré-requisitos: [Princípio de funcionamento do comando por modulação de largura de impulso \(MLI\)](#)
- nível : Bases da engenharia electrotécnica ou área de especialização
- duração estimada : 1/2 hora
- autor : [Francis Labrique](#)
- realização : Sophie Labrique
- versão portuguesa: Fernando Alves da Silva



Este projecto é financiado pela União Europeia no âmbito de uma acção Sócrates-Minerva. As informações nele contidas são da exclusiva responsabilidade dos seus autores. A União Europeia declina toda a responsabilidade relativamente ao seu uso.

GUIA DO LABORATÓRIO

A análise do conteúdo harmónico das tensões de saída, pode ser feita a partir do conteúdo harmónico dos potenciais P_j de cada um dos braços.

Pseudo desenvolvimento em série de Fourier do potencial P_j de um braço

QUESTÃO 1

Considera-se o caso em que o potencial P_1 é determinado pela comparação de uma onda de referência P_1 com uma portadora triangular ξ .

Supõe-se que a portadora ξ tem amplitude unitária e período T .

Para P_1 (figura 1), tem-se:

$$P_j = \frac{U}{2} \quad \text{si} \quad P_{jw} > \xi$$

$$P_j = -\frac{U}{2} \quad \text{si} \quad P_{jw} < \xi$$

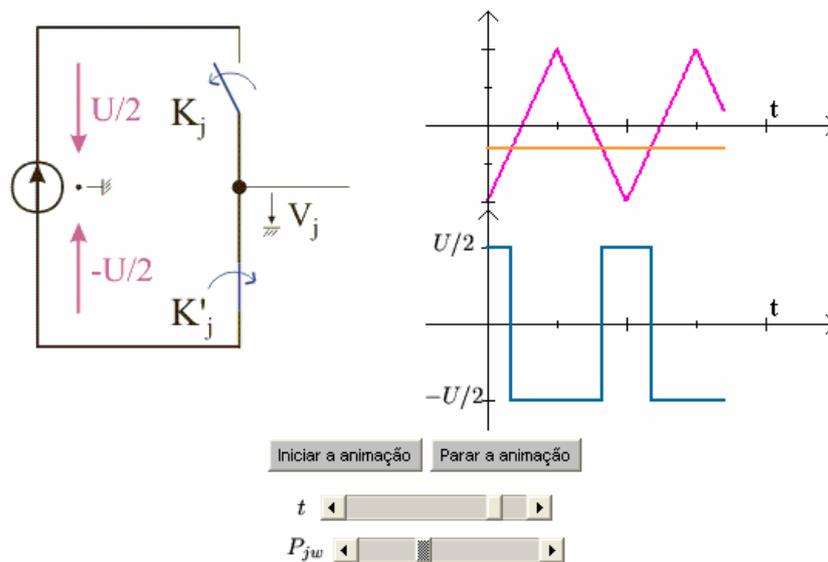


Figura 1 (animação)

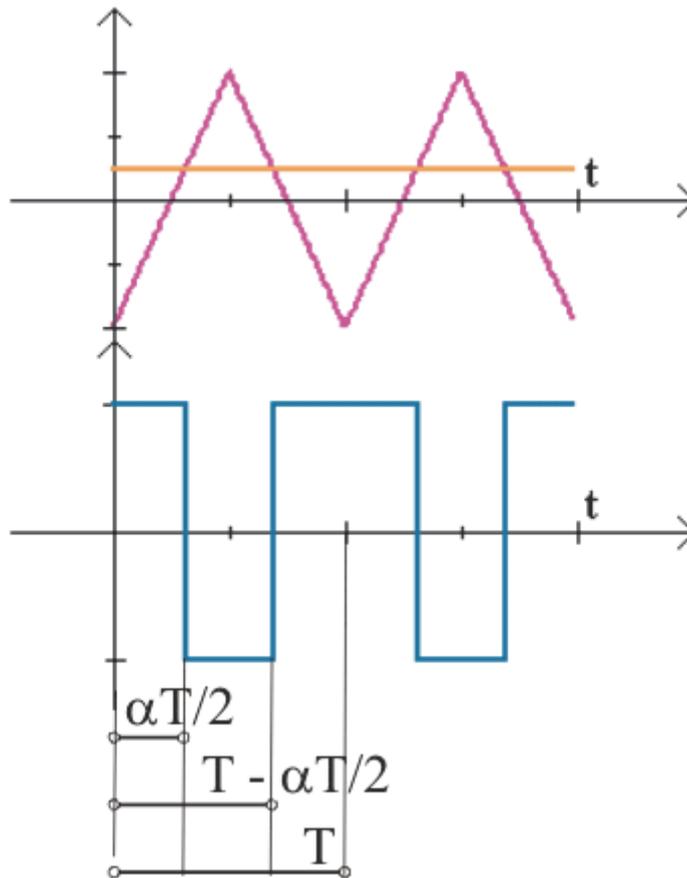


Figura 2

- Se $P_{j\omega}$ fosse constante (Figura 2), P_j seria uma função periódica de período T . Qual seria então o seu desenvolvimento em série de Fourier?

QUESTÃO 1: RESPOSTA

O desenvolvimento em série de Fourier para P_j seria:

$$P_j = \frac{U}{2} P_{j\omega} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2U}{i\pi} \sin\left[i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} P_{j\omega}\right)\right] \cos(i\omega_p t)$$

ou ainda:

$$P_j = \frac{U}{2} P_{j\omega} + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{2U}{(2i-1)\pi} \cos\left[(2i-1)\frac{\pi}{2} P_{j\omega}\right] \cos[(2i-1)\omega_p t] + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2U}{(2k\pi)} \sin\left[2k\frac{\pi}{2} P_{j\omega}\right] \cos[2k\omega_p t]$$

sendo $\omega_p = \frac{2\pi}{T}$, a pulsação da portadora.

QUESTÃO 1: JUSTIFICAÇÃO

O valor médio de P_j é igual a (figura 3)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_j d\omega_p t &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\alpha\pi} \frac{U}{2} d\omega_p t + \int_{\alpha\pi}^{2\pi-\alpha\pi} -\frac{U}{2} d\omega_p t + \int_{2\pi-\alpha\pi}^{2\pi} \frac{U}{2} d\omega_p t \right] \\ &= (2\alpha - 1) \frac{U}{2} \end{aligned}$$

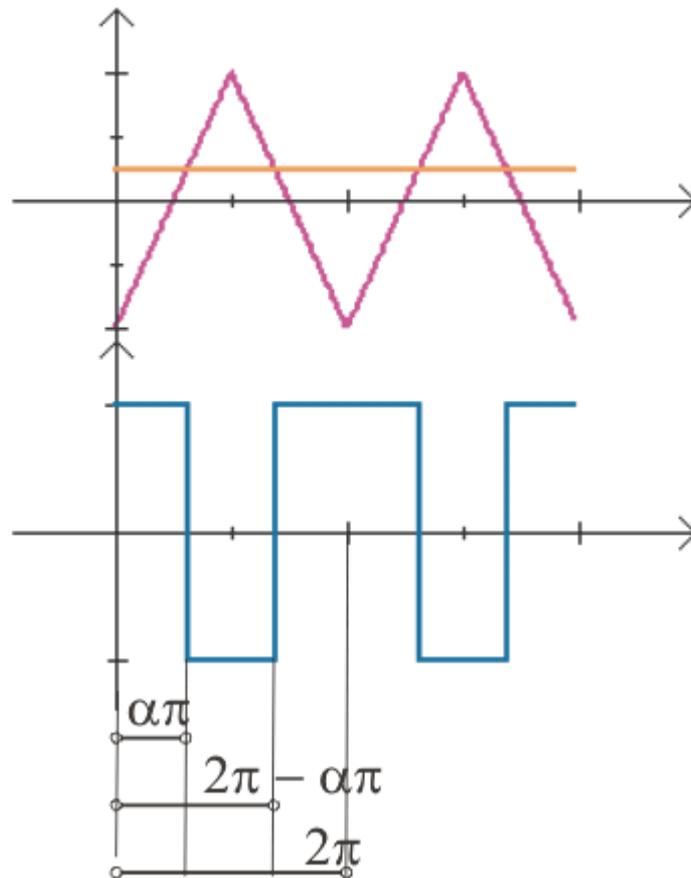


Figura 3

O valor de α calcula-se a partir de P_{jw} por:

$$\alpha\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} P_{jw}$$

Ou seja

$$2\alpha - 1 = P_{jw}$$

Donde:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_j d\omega_p t = \frac{U}{2} P_{jw}$$

Os termos da série de Fourier de P_j só contêm termos em coseno, devido à simetria par da onda em relação a $\omega_p \frac{T}{2} = \pi$.

A primeira harmónica de P_j (o termo em $\cos \omega_p t$) tem como amplitude (figura 4).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_j \cos \omega_p t d\omega_p t \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\alpha\pi} \frac{U}{2} \cos \omega_p t d\omega_p t + \int_{\alpha\pi}^{2\pi-\alpha\pi} -\frac{U}{2} \cos \omega_p t d\omega_p t + \int_{2\pi-\alpha\pi}^{2\pi} \frac{U}{2} \cos \omega_p t d\omega_p t \right] \end{aligned}$$

Ou seja:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_j \cos \omega_p t d\omega_p t = \frac{2U}{\pi} \sin(\alpha\pi)$$

Como

$$\alpha\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} P_{jw}$$

Vem:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_j \cos \omega_p t d\omega_p t = \frac{2U}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} P_{jw}\right) = \frac{2U}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} P_{jw}\right)$$

A segunda harmónica de P_j (o termo em $\cos 2\omega_p t$) tem amplitude

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_j \cos 2\omega_p t d\omega_p t \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\alpha\pi} \frac{U}{2} \cos 2\omega_p t d\omega_p t + \int_{\alpha\pi}^{2\pi-\alpha\pi} -\frac{U}{2} \cos 2\omega_p t d\omega_p t + \int_{2\pi-\alpha\pi}^{2\pi} \frac{U}{2} \cos 2\omega_p t d\omega_p t \right] \end{aligned}$$

Ou seja

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_j \cos 2\omega_p t d\omega_p t = \frac{2U}{2\pi} \sin 2\alpha\pi$$

Sendo

$$\alpha\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} P_{jw}$$

Vem:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_j \cos 2\omega_p t d\omega_p t = \frac{2U}{2\pi} \sin\left(2\frac{\pi}{2} + 2\frac{\pi}{2} P_{jw}\right) = -\frac{U}{\pi} \sin(\pi P_{jw})$$

Da mesma forma se calculariam mais harmónicas

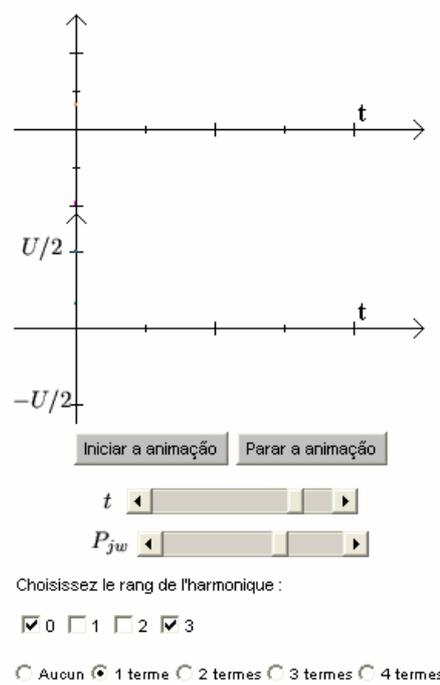


Figura 4 (animação)

QUESTÃO 2

Como $P_{j\omega}$ varia ao longo do tempo, P_i já não é uma função periódica de período T , dado que a largura dos impulsos varia de período para período (T).

No entanto, se $P_{j\omega}$ variar lentamente à escala do período de modulação T , a largura dos impulsos rectangulares pouco varia de um período de modulação para o outro: em torno do instante t reconstitui-se de maneira satisfatória $P_j(t)$, considerando o desenvolvimento em série de Fourier que se obteria se $P_{j\omega}$ fosse constante de valor $P_{j\omega}(t)$.

- **Nestas condições, qual será o desenvolvimento em série de Fourier quando $P_{j\omega} = r \sin(\omega t + \theta_0)$?**

QUESTÃO 2: RESPOSTA

$$P_j(t) \simeq \frac{U}{2} P_{j\omega}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{2U}{(2j-1)\pi} \cos \left[(2j-1) \frac{\pi}{2} P_{j\omega}(t) \right] \cos[(2j-1)\omega_p t] \\ + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2U}{2k\pi} \sin \left[2k \frac{\pi}{2} P_{j\omega}(t) \right] \cos(2k\omega_p t)$$

Sendo

$$P_{j\omega}(t) = r \sin(\omega t + \theta_0) \quad \text{avec} \quad \omega \ll \omega_p$$

Tem-se:

$$P_j(t) \simeq r \frac{U}{2} \sin \omega t + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{2U}{(2j-1)\pi} \cos \left[(2j-1) \frac{\pi}{2} r \sin(\omega t + \theta_0) \right] \cos[(2j-1)\omega_p t] \\ + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2U}{2k\pi} \sin \left[2k \frac{\pi}{2} r \sin(\omega t + \theta_0) \right] \cos(2k\omega_p t)$$

Na animação seguinte vê-se que este pseudo - desenvolvimento em série de Fourier reconstitui razoavelmente a onda MLI obtida de P_i .

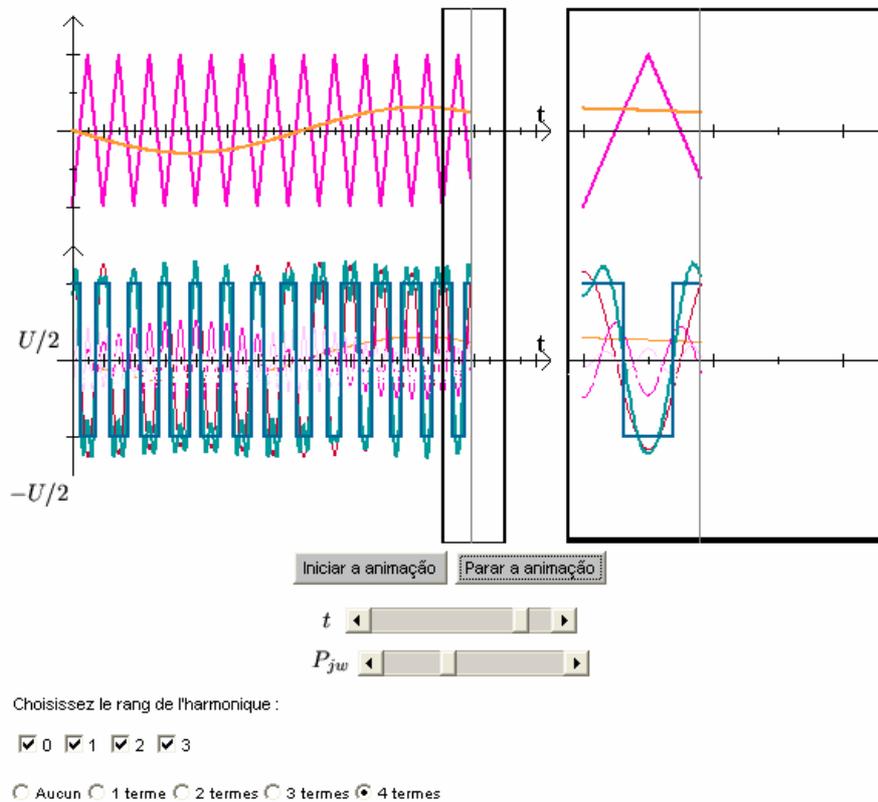


Figura 5 (animação)

Análise do pseudo desenvolvimento em série de Fourier

QUESTÃO 3

O pseudo - desenvolvimento em série de Fourier de P_j é igual a:

$$P_j(t) \simeq \frac{U}{2} P_{jw}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{2U}{(2j-1)\pi} \cos \left[(2j-1) \frac{\pi}{2} P_{jw}(t) \right] \cos[(2j-1)\omega_p t] + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2U}{2k\pi} \sin \left[2k \frac{\pi}{2} P_{jw}(t) \right] \cos(2k\omega_p t)$$

Cada componente desta série apresenta uma "amplitude" que é função do tempo.

Assim, se $P_j = r \sin(\omega t + \theta_0)$, tem-se:

$$P_j(t) \simeq r \frac{U}{2} \sin \omega t + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{2U}{(2j-1)\pi} \cos \left[(2j-1) \frac{\pi}{2} r \sin(\omega t + \theta_0) \right] \cos[(2j-1)\omega_p t] + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2U}{2k\pi} \sin \left[2k \frac{\pi}{2} r \sin(\omega t + \theta_0) \right] \cos(2k\omega_p t)$$

- O "valor médio" de P_j tem por amplitude

$$r \frac{U}{2} \sin(\omega t + \theta_0)$$

Esta amplitude segue o valor da referência.

Tal confirma a afirmação, anteriormente feita, de que com o comando MLI, o potencial P_1 segue em média o valor de referência $P_{1\omega}$.

- O termo de pulsação $\omega_p t$, à frequência da portadora escreve-se:

$$\frac{2U}{\pi} \cos\left[\frac{\pi}{2} r \sin(\omega t + \theta_0)\right] \cos \omega_p t$$

- **Mostre que a variação da sua “amplitude” em função do tempo origina uma família de riscas espectrais (frequências harmónicas) de pulsação ω_p , $\omega_p \pm 2\omega$, $\omega_p \pm 4\omega$, em lugar de uma única frequência harmónica (risca espectral) de pulsação ω_p .**

AJUDA

Para esta “demonstração”, basta substituir primeiro a “amplitude” , $\cos\left[\frac{\pi}{2} r \sin(\omega t + \theta_0)\right]$ pelo seu desenvolvimento em série de Taylor

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} r \sin(\omega t + \theta_0)\right] = 1 - \frac{1}{2!} \left[\frac{\pi}{2} r \sin(\omega t + \theta_0)\right]^2 + \frac{1}{4!} \left[\frac{\pi}{2} r \sin(\omega t + \theta_0)\right]^4 \dots$$

E depois exprimir , $\sin^2(\omega t + \theta_0)$, $\sin^4(\omega t + \theta_0)$, ... em função de , $\cos 2\omega t$, $\cos 4\omega t$, ...

$$\sin^2(\omega t + \theta_0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(\omega t + \theta_0)$$

$$\sin^4(\omega t + \theta_0) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2(\omega t + \theta_0) + \frac{1}{8} \cos 4(\omega t + \theta_0)$$

...

QUESTÃO 3: RESPOSTA

$$\begin{aligned} & \frac{2U}{\pi} \cos\left[\frac{\pi}{2} r \sin(\omega t + \theta_0)\right] \cos \omega_p t \\ &= \frac{2U}{\pi} \left\{ 1 - \frac{1}{2!} \left[\frac{\pi}{2} r \sin(\omega t + \theta_0)\right]^2 + \frac{1}{4!} \left[\frac{\pi}{2} r \sin(\omega t + \theta_0)\right]^4 \dots \right\} \cos \omega_p t \\ &= \frac{2U}{\pi} \left\{ 1 - \frac{1}{2!} \frac{\pi^2 r^2}{4} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(\omega t + \theta_0)\right] + \frac{\pi^4 r^4}{4! 16} \left[\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2(\omega t + \theta_0) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \frac{1}{8} \cos 4(\omega t + \theta_0)\right] + \dots \right\} \cos \omega_p t \end{aligned}$$

Agrupando, no factor multiplicador do termo $\cos \omega_p t$ todos os termos constantes, e agrupando todos os termos em $\cos 2\omega t$, os termos em $\cos 4\omega t$, ... têm-se :

$$\begin{aligned} \frac{2U}{\pi} \cos\left[\frac{\pi}{2} r \sin(\omega t + \theta_0)\right] \cos \omega_p t &= \frac{2U}{\pi} \left[1 - \frac{1}{2!} \frac{\pi^2 r^2}{8} + \frac{1}{4!} \frac{\pi^4 r^4}{16} \dots \right] \cos \omega_p t \\ &+ \frac{2U}{\pi} \left[\frac{1}{2!} \frac{\pi^2 r^2}{8} - \frac{1}{4!} \frac{\pi^4 r^4}{32} \dots \right] \cos 2(\omega t + \theta_0) \cos \omega_p t \\ &+ \frac{2U}{\pi} \left[\frac{1}{4!} \frac{\pi^4 r^4}{128} \dots \right] \cos 4(\omega t + \theta_0) \cos \omega_p t \dots \end{aligned}$$

Usando a identidade trigonométrica $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$, obtém-se:

$$\begin{aligned} &\frac{2U}{\pi} \cos\left[\frac{\pi}{2} r \sin(\omega t + \theta_0)\right] \cos \omega_p t \\ &= \frac{2U}{\pi} \left[1 - \frac{1}{2!} \frac{\pi^2 r^2}{8} + \frac{1}{4!} \frac{\pi^4 r^4}{16} \dots \right] \cos \omega_p t \\ &+ \frac{2U}{\pi} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2!} \frac{\pi^2 r^2}{8} - \frac{1}{4!} \frac{\pi^4 r^4}{32} \dots \right] [\cos[(\omega_p - 2\omega - 2\theta_0)t] + \cos[(\omega_p - 2\omega + 2\theta_0)t]] \\ &+ \frac{2U}{\pi} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4!} \frac{\pi^4 r^4}{128} + \dots \right] [\cos[(\omega_p - 4\omega - 4\theta_0)t] + \cos[(\omega_p - 4\omega + 4\theta_0)t]] \\ &+ \dots \end{aligned}$$

O termo de pulsação ω_p e de amplitude $\cos\left[\frac{\pi}{2} r \sin(\omega t + \theta_0)\right]$ é, então, equivalente a um conjunto de harmónicas (ou conjunto de riscas espectrais):

- Uma risca de pulsação ω_p
- Duas riscas de pulsação $\omega_p - 2\omega$ e $\omega_p + 2\omega$ tendo as duas a mesma amplitude
- Duas riscas de pulsação $\omega_p - 4\omega$ e $\omega_p + 4\omega$ tendo as duas a mesma amplitude
- ...

As amplitudes das riscas decrescem rapidamente à medida que a sua pulsação se afasta da pulsação ω_p .

- Com um cálculo similar, pode mostrar-se que o termo de pulsação $2\omega_p$ do pseudo desenvolvimento em série de Fourier

$$-\frac{2U}{2\pi} \sin[\pi r \sin(\omega t + \theta_0)] \cos(2\omega_p t)$$

origina :

- Duas riscas de pulsação $2\omega_p - \omega$ e $2\omega_p + \omega$ tendo as duas a mesma amplitude
- Duas riscas de pulsação $2\omega_p - 3\omega$ e $2\omega_p + 3\omega$ tendo as duas a mesma amplitude
- ...

Verifica-se, então, que as harmónicas se agrupam em famílias em torno das pulsações ω_p , $2\omega_p$, $3\omega_p$, ...